

Probabilité, centre de cercle, triangle

Maxime KIENTZ

24 novembre 2017

Cet article tourne autour d'une question à l'énoncé relativement simple, mais dont la résolution nécessite une approche méthodique et astucieuse du problème. Il s'agit de : "Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O . On place aléatoirement et indépendamment les uns des autres trois points A , B et C sur le cercle. Quelle est la probabilité que O appartienne à l'intérieur du triangle ABC ?"

Prérequis : Loi uniforme, Intégration, Géométrie du cercle

Niveau : Terminale S

1 Introduction, raisonnement

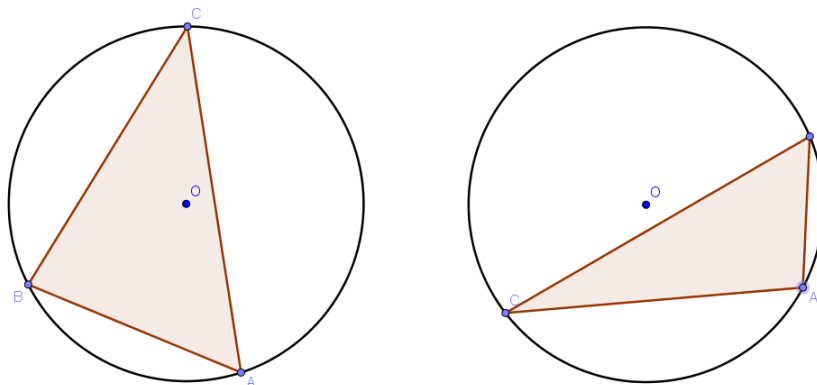


FIGURE 1 – Un cas où l'évènement se réalise, et un autre où il ne se réalise pas

La **Figure 1** ci-dessus illustre notre problème et donne deux exemples à titres indicatifs. On cherche à évaluer la probabilité qu'un triplet de points (A, B, C) sur le cercle $\mathcal{C}$ forme un triangle contenant le centre du cercle, qui correspond donc à la figure de gauche dans l'exemple ci-dessus.

Quantifier cette probabilité sans fixer des étapes de construction n'est pas la chose la plus adaptée, il faut donc avant tout planifier notre étude. Une des idées valides serait de donner un "*ordre*" au placement des points (disons A , puis B , puis C) et d'en examiner les contraintes permettant de satisfaire la réalisation de notre évènement. C'est exactement ce que nous allons faire ici.

2 Positionnement des points

2.1 Le point A

Le point A peut être placé à n'importe quel endroit sur le cercle. Etant donné que toute rotation dont le centre est le centre du cercle conserve la géométrie de ce dernier, on peut alors aisément partir du principe que l'on peut placer le point A au même endroit à chaque fois. Ainsi, quitte à effectuer une rotation pour obtenir cette position, plaçons alors A comme indiqué sur la **Figure 2**.

De plus, comme les homothéties conservent également la géométrie du cercle, on peut aussi faire la supposition que le rayon du cercle est $r = 1$ ce qui simplifiera une observation plus tard.

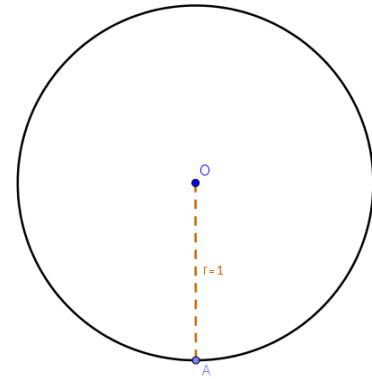


FIGURE 2 – Placement du point A

2.2 Le point B

Si l'on considère la droite (OA) comme un axe de symétrie découpant le cercle $\mathcal{C}$ en deux demi-cercles, la première chose à comprendre est que le placement du point B peut être restreint à un placement sur un seul demi-cercle. En effet, quitte à effectuer une symétrie axiale du cercle par rapport à la droite (OA) , il est toujours possible de placer B sur le demi-cercle gauche, par exemple. Ainsi, il existe un réel $\alpha \in [0; \pi]$ tel que l'angle $\widehat{AOB}$ possède une mesure algébrique α .

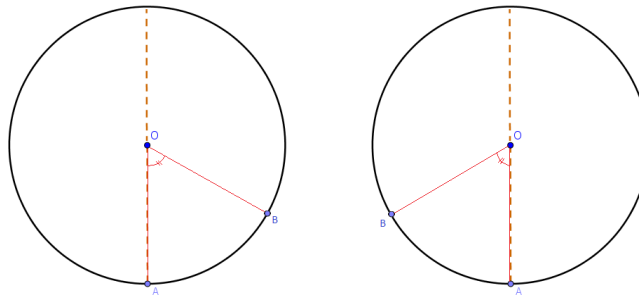


FIGURE 3 – Si le point B se trouve à droite, on peut effectuer une symétrie axiale par (OA) pour l'amener à gauche

Les points A et B sont à présent fixés aléatoirement et nous n'avons plus qu'à discuter de la réalisation de l'évènement selon la position du point C , comme le montre la **Figure 4**.

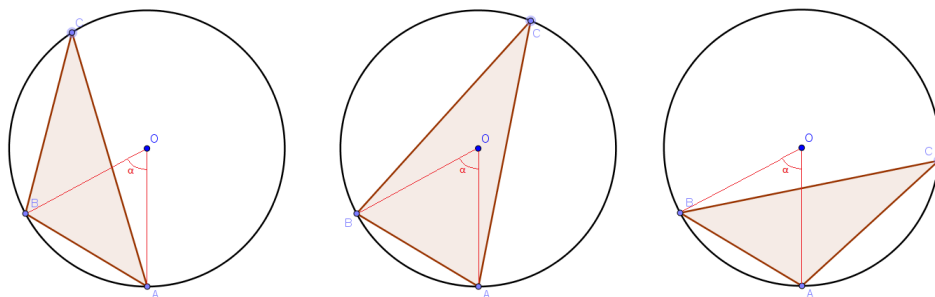


FIGURE 4 – Les points A et B sont fixés aléatoirement, la position du point C détermine l'issue

2.3 Le point C

Il ne reste plus qu'à placer le point C . Pour déterminer la probabilité que l'évènement se réalise, il ne nous reste plus qu'à déterminer une zone sur le cercle où placer le point C , pour laquelle le centre O du cercle appartient à l'intérieur du triangle ABC , puis d'évaluer la probabilité que le point C atterrisse aléatoirement dans cette zone. On a besoin de l'affirmation suivante :

Affirmation : Soient A' et B' les symétriques respectifs de A et B par la symétrie centrale de centre O . Alors O est à l'intérieur de ABC si et seulement si le point C se trouve sur l'arc de cercle $\widehat{A'B'}$

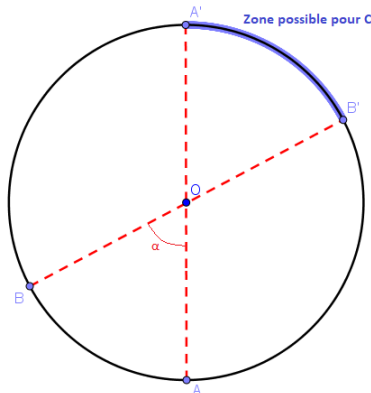


FIGURE 5 – La zone possible pour que l'intérieur de ABC contienne O

Maintenant que les choses sont mises à plat concernant le placement des trois points, vous pouvez par vous-même essayer de déterminer la probabilité de notre évènement, avant de passer à la section suivante pour en obtenir une solution.

3 Résolution, probabilité associée à l'évènement

Etant donné que le point A est considéré comme fixé (cf. **Figure 2**), aucune étude probabiliste n'est à mener sur la position du point A . Il servira d'origine pour déterminer la valeur des angles nécessaires à nos calculs.

Le point B peut être placé à n'importe quelle position du demi-cercle gauche, comme il été expliqué en **2.2**. Comme il n'y a pas de position "*plus favorite*" qu'une autre, on se trouve dans une situation d'équiprobabilité et on peut affirmer que le point B suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0; \pi]$ qui n'est rien d'autre que l'intervalle représentant toutes les valeurs que l'angle $\widehat{AOB}$ peut prendre. Ainsi, l'angle α mentionné dans la section **2.2** peut prendre toute valeur comprise entre 0 et π avec la même probabilité.

Le point C peut être placé sur la totalité du cercle. En réitérant les mêmes arguments que ceux évoqués pour le point B , on peut affirmer que le placement de C suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

L'angle $\widehat{AOB}$ étant de mesure α et le cercle étant supposé de rayon $r = 1$, on peut alors affirmer que la longueur de l'arc de cercle $\widehat{A'B'}$ vaut également α et que le cercle est de circonférence 2π . Ainsi, la probabilité que le point C appartienne à l'arc de cercle $\widehat{A'B'}$ mentionné en **2.3** est de $P(C \in \widehat{A'B'}) = \frac{\alpha}{2\pi}$

Il ne nous reste plus plus qu'à sommer ces probabilités selon toutes les positions possibles de B . Cette somme s'effectuant sur un phénomène continu (en effet les positions de B ne peuvent être dénombrées), on passera par une intégrale pour sommer tout ceci.

En notant P la probabilité de notre évènement, on a donc :

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\alpha}{2\pi} d\alpha \\
 &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\pi} \alpha d\alpha \\
 &= \frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{\alpha^2}{2} \right]_0^{\pi} \\
 &= \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{2} - 0 \right) \\
 &= \frac{\pi^2}{4\pi^2} \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

A noter que l'intégrale entre 0 et π ainsi que le coefficient $\frac{1}{\pi}$ proviennent de la loi uniforme suivie par B sur l'intervalle $[0; \pi]$. Finalement, cette valeur signifie que la probabilité que O appartienne à l'intérieur du triangle ABC où A, B et C sont placés aléatoirement sur le cercle vaut $\frac{1}{4}$.

"*Tout homme est le centre d'un cercle dont il ne peut franchir la circonférence*" - Proverbe Anglais