

Le Paradoxe de Lewis CARROLL

Maxime KIENTZ

30 mai 2017

Cet article est consacré à un problème de géométrie perturbant au premier abord : Le paradoxe de Lewis CARROLL¹. Cet article reprend d'abord l'énoncé du problème, une observation géométrique pour le comprendre, puis quelques preuves afin de l'expliquer.

Prérequis : *Théorème de Thalès, Théorème de Pythagore, Trigonométrie, Equations de droites, Vecteurs.*

Niveau : 2nde générale.

1 Une introduction

Le paradoxe de Lewis CARROLL est un paradoxe qui manipule avec ingéniosité les aires de différentes figures et le placement de ces dernières. Commençons par un exemple pour illustrer ceci : Considérez le carré de la **Figure 1** donnée ci dessous : C'est un carré de taille $8cm \times 8cm$, dont l'aire est donc de $A_1 = 64cm^2$. On découpe ce carré selon ce qui est donné dans la **Figure 1** toujours. Nous avons donc deux trapèzes de bases $5cm$ et $3cm$ respectivement, et de hauteur $5cm$. Nous avons également deux triangles rectangles de base $8cm$ et de hauteur $3cm$. On découpe ce carré et on replace les figures de telle façon à ce que l'on obtienne un rectangle, comme donné dans la **Figure 1** également.

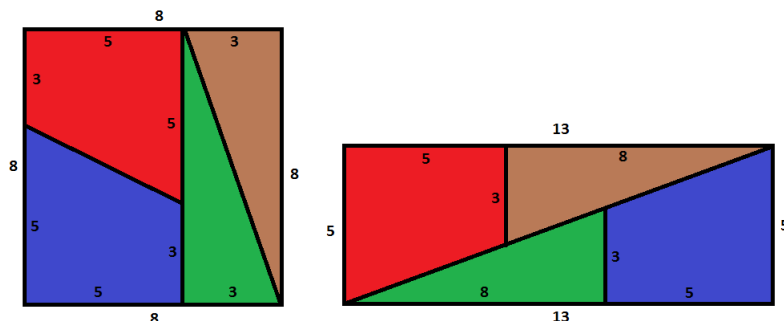


FIGURE 1 – Le carré et le rectangle, formés à partir des quatre figures de base

Mais en observant l'aire de ce rectangle, on se rend compte que son aire $A_2 = 65cm^2$... Etrange non ? Comment à partir des deux figures, peut-on obtenir deux aires différentes, alors que les deux figures sont composées des mêmes quatre éléments ?

1. Lewis CARROLL (1832-1898), britannique connu en tant qu'auteur du roman "Les Aventures d'Alice au Pays des Merveilles" (1866), était également un professeur de mathématiques à Oxford. On lui doit des ouvrages d'algèbre et de logique mathématique ainsi que des recueils d'énigmes et de jeux

2 Une première analyse

Non, la magie n'existe pas. Comme le disait LAVOISIER² : "*Rien ne se perd, rien ne se crée, tout se transforme.*" Il n'y a donc aucune possibilité de former deux figures d'aires différentes avec les mêmes figures de base. Mais alors, où se trouve notre problème ? Une première approche serait de tracer la figure en taille réelle avec un outil géométrique afin d'observer à quoi ressemblent nos figures, avec leur dimensions exactes. Reproduites sur Géogébra, on obtient le résultat suivant :

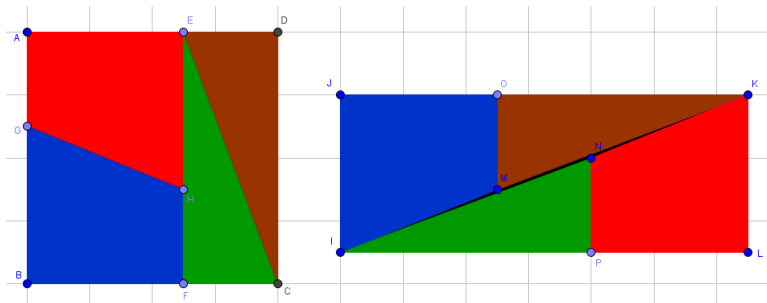


FIGURE 2 – Le carré et le rectangle, reproduits sur Géogébra

On peut s'apercevoir que dans cette reproduction, dans le rectangle, un élément apparaît alors qu'il n'était pas présent dans la représentation précédente : Un petit espace noir, chevauchant une diagonale du rectangle. Ce petit espace noir signifie simplement qu'il n'appartient à aucun des deux trapèzes ou des deux triangles utilisés pour former la figure. Vous l'aurez compris, le cm^2 perdu se trouve effectivement dans ce "trou noir". La figure que l'on trace à la main n'est donc qu'une illusion : En effet la diagonale que l'on trace à la main n'en est pas une, et plus exactement, les points qui sont supposés former cette diagonale ne sont pas alignés (Sur la **Figure 2**, il s'agit des points I, M, N, K). C'est justement sur cet alignement que nous allons travailler.

3 Quelques démonstrations

Il est temps de montrer que tout ceci c'est qu'illusion. Je propose ici quatre démonstrations, n'utilisant jamais les mêmes méthodes. Un rectangle se conserve par symétrie centrale, où le centre de la symétrie n'est rien d'autre que le centre du rectangle. Ainsi, tout ce qui est vrai dans les triangles IPN et INK est respectivement vrai dans les triangles KOM et KJI . Nous travaillerons donc uniquement dans les triangles IPL et INK .

3.1 Par le théorème de Thalès

Le théorème de Thalès demande à ce que les points I, P, L et I, K, N soient respectivement alignés. On va donc aborder un raisonnement appelé "*raisonnement par l'absurde*" : On va supposer que quelque chose est vrai, puis on arrivera à une contradiction. Cette contradiction nous indiquera alors que l'hypothèse était fausse.

Affirmation : Les points I, K, N ne sont pas alignés.

Démonstration. Supposons que les points I, K, N sont alignés. Dans ce cas nous nous trouvons dans une configuration de Thalès : Comme les droites (PN) et (KL) sont parallèles, nous avons la relation suivante :

$$\frac{IP}{IL} = \frac{IN}{IK} = \frac{PN}{LK}.$$

Comme nous ne connaissons pas instinctivement les longueurs IN et IK , nous allons nous contenter de l'égalité :

$$\frac{IP}{IL} = \frac{PN}{LK}$$

Or, on rappelle que $IP = 8cm$, $PL = 5cm$, $PN = 3cm$, $LK = 5cm$, de telle façon à ce que l'on ait l'égalité :

$$\frac{IP}{IL} = \frac{PN}{LK} \Leftrightarrow \frac{8}{13} = \frac{3}{5}$$

2. Antoine Laurent Lavoisier (1743-1794) est un chimiste, philosophe et économiste français, souvent présenté comme le père de la chimie moderne

Vérifiez par vous même si vous en doutez, cette égalité est fausse (celà revient à $39 = 40$). La supposition que l'on a fait au départ, à savoir que les points I, K, N étaient alignés, est donc fausse. Donc les points I, K, N ne sont pas alignés. $\square$

Le point N ne se trouve donc pas sur la diagonale du rectangle, par conséquent il y a un "espace" entre la diagonale et le point N . On le voit plus précisément sur la figure ci-dessous :

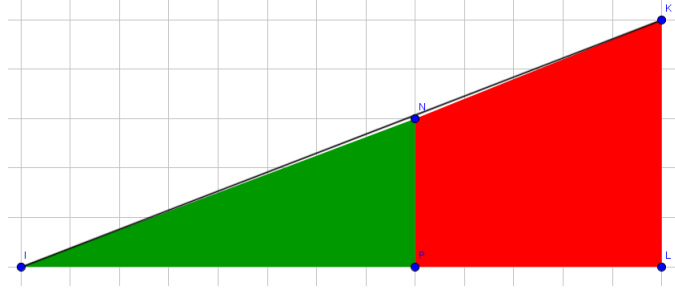


FIGURE 3 – Le segment $[IK]$, qui est la diagonale du rectangle, et le point N .

3.2 Par le théorème de Pythagore

Si les trois points I, N, K sont alignés, alors on devrait avoir l'égalité de longueurs suivante : $IK = IN + NK$. Nous allons montrer que ceci n'est pas le cas, à l'aide du théorème de Pythagore. En effet, nous travaillons ici dans des triangles rectangles, et nous pouvons utiliser le théorème de Pythagore. Introduisons d'abord le point Z sur le segment $[LK]$ tel que $[KZ] = 2$ (**Figure 4**). Ce point nous sera utile dans le triangle NZK , qui pour le coup est un triangle rectangle.

Affirmation : Dans la composition de la figure, $IK \neq IN + NK$.

Démonstration. Par le théorème de Pythagore, comme les triangles IPN , NZK et ILK sont rectangles, nous avons respectivement :

$$\begin{aligned} IK^2 &= IL^2 + KL^2 = 13^2 + 5^2 = 169 + 25 = 194 \\ IN^2 &= IP^2 + NP^2 = 8^2 + 3^2 = 64 + 9 = 73 \\ NK^2 &= NZ^2 + ZK^2 = 5^2 + 2^2 = 25 + 4 = 29 \end{aligned}$$

On a donc $IK = \sqrt{194}$, $IN = \sqrt{73}$ et $NK = \sqrt{29}$. Or $\sqrt{194} \approx 13.9283$ et $\sqrt{73} + \sqrt{29} \approx 13.9291$. La différence est minime, mais elle suffit pour observer que $IK \neq IN + NK$. Donc les points I, N, K ne sont pas alignés. $\square$

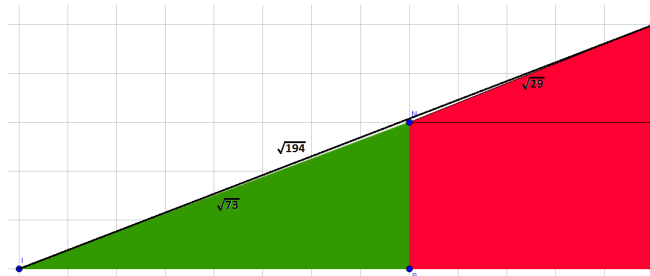


FIGURE 4 – Les segments $[IK]$, $[IN]$ et $[NK]$ et leurs longueurs.

3.3 Par la trigonométrie

Vous savez que : *Lorsque l'on coupe deux droites parallèles avec une troisième droite, les angles correspondants sont égaux.* Nous allons ici nous servir des outils de trigonométrie pour montrer que les angles $\widehat{INP}$, $\widehat{IKL}$ ne sont pas égaux. Comme les droites (NP) et (KL) sont parallèles, la seule cause possible sera que l'objet qui coupe ces deux droites n'est pas une droite, et donc que les points I, N, K ne sont pas alignés.

Affirmation : Les angles $\widehat{INP}$ et $\widehat{IKL}$ ne sont pas égaux.

Démonstration. Plaçons nous dans les triangles IPN et ILK . Par la relation trigonométrique vue au collège, vous savez que $\tan(\widehat{INP}) = \frac{IP}{NP}$ et $\tan(\widehat{IKL}) = \frac{IL}{KL}$. En utilisant la fonction réciproque de la tangente (communément notée $\tan^{-1}$ ou arctan), on obtient les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\widehat{INP} &= \tan^{-1}\left(\frac{IP}{NP}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{8}{3}\right) \approx 69.44 \\ \widehat{IKL} &= \tan^{-1}\left(\frac{IL}{KL}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{13}{5}\right) \approx 68.96\end{aligned}$$

On voit bien que $69.44 \neq 68.96$, donc $\widehat{INP} \neq \widehat{IKL}$ □

Or, selon la propriété énoncée plus haut, ces deux angles devraient être égaux. Comme les droites (NP) et (KL) sont parallèles, la seule chose pouvant être mise en défaut est l'objet par lequel elles sont coupées. Les points I, N, K ne sont par conséquent pas sur la même droite, et ne sont donc pas alignés.

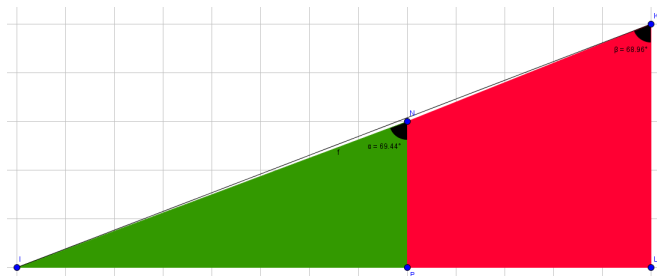


FIGURE 5 – Les angles $\widehat{INP}$ et $\widehat{IKL}$ ne sont pas égaux

3.4 Par les droites ou les vecteurs

Le travail peut se faire ici avec les droites, ou les vecteurs, pour aboutir au même résultat. En effet, *montrer que deux droites n'ont pas le même coefficient directeur, c'est montrer que leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires.* Je décide ici de le faire avec les droites, mais la transcription aux vecteurs est quasi-immédiate. Nous allons étudier la droite (IN) et s'apercevoir que le point K n'appartient pas à cette droite, à travers l'équation de la droite (IN) . Pour cela, nous repérons notre figure comme le montre la **Figure 6**. Ainsi, nous obtenons les coordonnées suivantes : $I(0;0)$, $P(8;0)$, $L(13;0)$, $N(8;3)$, $K(13;5)$.

Affirmation : Le point K ne se trouve pas sur la droite (IN) .

Démonstration. Trouvons l'équation de la droite (IN) , qui est de la forme $y = ax + b$. On remarque que (IN) passe par $I(0;0)$, donc que l'ordonnée à l'origine est $b = 0$. La formule pour le coefficient directeur de la droite (IN) nous donne :

$$a = \frac{y_N - y_I}{x_N - x_I} = \frac{3}{8}$$

L'équation de la droite (IN) est donc $y = \frac{3}{8}x$. Étudions l'image de $x = 13$ par ceci. Si le point K se trouvait sur la droite, alors l'image de $x = 13$ devrait être $y = 5$. Or $y = \frac{3}{8} \times 13 = \frac{39}{8} = 4.875$. On en déduit que K n'appartient pas à la droite (IN) , et les trois points ne sont donc pas alignés. □

Conclusion : Plusieurs méthodes sont possibles pour mettre en défaut l'alignement de ces trois points. A chaque fois, le fait de montrer que les points ne sont pas alignés montre qu'il y a bien un "espace" entre la diagonale et le point N . Par symétrie centrale, cet espace se trouve aussi entre la même diagonale et le point M . C'est dans ces deux espaces que se perd notre cm^2 ...

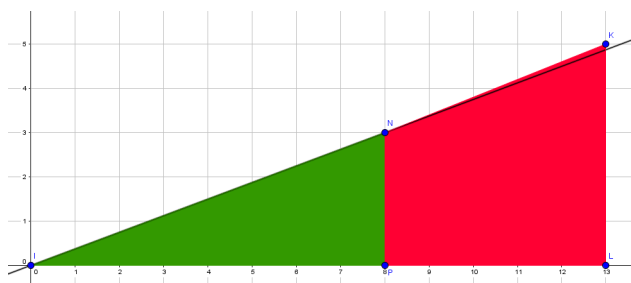


FIGURE 6 – La droite (IN) d'équation $y = \frac{3}{8}x$ et le point K , n'y appartenant pas.

4 Les Puzzles de Lewis CARROLL

Dans le même esprit, plusieurs couples de figures qui reflètent le même paradoxe existent. Un tel couple s'appelle "*Puzzle de Lewis CARROLL*". En voici quelques-uns, évidemment tracés à la main pour ne pas révéler le problème présent dans la figure :

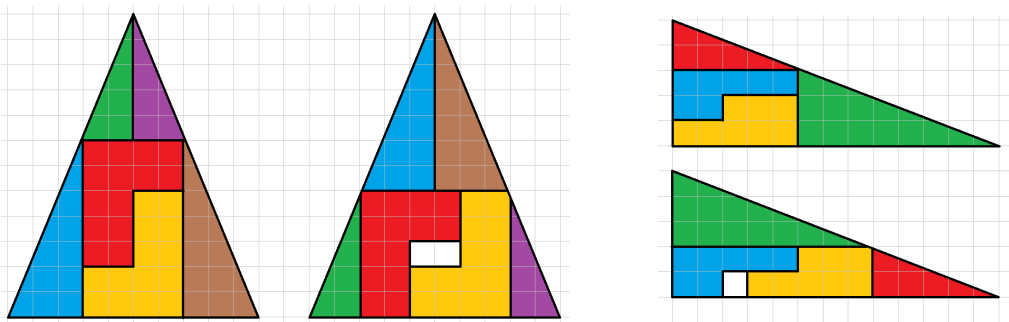
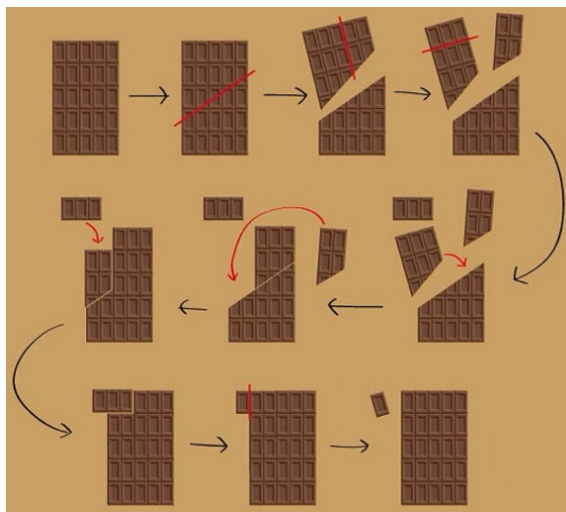


FIGURE 7 – Deux autres Puzzles de Lewis CARROLL

A vous de trouver, dans chacun des puzzles ci-dessus, où se trouve le(s) problème(s) et comment mettre en défaut la figure. Les méthodes utilisées auparavant devraient vous inspirer ... Le premier est relativement plus difficile que le second. Ce paradoxe illustre bien une chose que chaque professeur a au moins une fois dit et répété au fil de sa carrière : "**En mathématiques, un dessin n'est jamais une preuve**" ! Ce paradoxe met en est une preuve tangible...

Au fait, croyez-vous toujours que l'on peut manger du chocolat à l'infini ?



"La géométrie est l'art de raisonner juste sur des figures fausses." - René DESCARTES