

CHAPITRE 4 – CALCUL LITTÉRAL

1) Développer et réduire une expression littérale

Définition : Réduire une expression, c'est l'écrire avec le moins de termes possibles.

Pour faire ceci, il faut repérer quels termes de l'expression vont ensemble. On regroupera ensemble les *termes constants* (sans lettres), et les *termes variables* (avec lettres) ayant les mêmes inconnues.

Exemple : $7 + 3x^2 + 5x - 2x^2 + 4x - 3 = 4 + x^2 + 9x$

Remarque : En général une fois réduite, on écrit l'expression avec les x^2 en premier, puis les x , puis les nombres. S'il y a de plus grandes puissances, on commence par celle d'exposant le plus élevé.

Exemple : $4 + x^2 + 9x = x^2 + 9x + 4$

Définition : Développer une expression, c'est transformer un produit en somme ou une différence.

Propriété : k, a, b sont trois nombres relatifs. On a : $k \times (a+b) = k \times a + k \times b$ et $k \times (a-b) = k \times a - k \times b$

Vocabulaire : L'opération effectuée pour développer une expression s'appelle la *distributivité*. On a *distribué* le nombre k aux nombres a et b . Chaque *distribution* correspond à une multiplication.

Exemples : Développe les expressions suivantes :

- $7(x+2) = 7 \times x + 7 \times 2 = 7x + 14$
- $3(x-6) = 3 \times x - 3 \times 6 = 3x - 18$
- $a(3+b) = 3 \times a + a \times b = 3a + ab$
- $x(x-7) = x \times x - 7 \times x = x^2 - 7x$

Remarque : Attention aux signes ! Si dans la parenthèse il y a un signe $-$ il faut le garder lorsqu'on distribue.

Vidéos : Réduire une expression (1)

<https://www.youtube.com/watch?v=qEUb4IU-HiY&list=PLVUDmbpupCardw9Q239DCa2mKVYuNSpKc&index=14>

EXERCICE : Réduire une expression

<https://www.youtube.com/watch?v=R6-mxyhgSmA&list=PLVUDmbpupCardw9Q239DCa2mKVYuNSpKc&index=15>

Appliquer la formule de distributivité pour le calcul mental

<https://www.youtube.com/watch?v=ByzozWOSOAY&list=PLVUDmbpupCardw9Q239DCa2mKVYuNSpKc&index=6>

Développer une expression (1)

https://www.youtube.com/watch?v=S_ckQpWzmG8&list=PLVUDmbpupCardw9Q239DCa2mKVYuNSpKc&index=8

Développer une expression (2)

<https://www.youtube.com/watch?v=URNld8xsXgM&list=PLVUDmbpupCardw9Q239DCa2mKVYuNSpKc&index=9>

EXERCICE : Développer une expression

<https://www.youtube.com/watch?v=7k5kFah3z7w&list=PLVUDmbpupCardw9Q239DCa2mKVYuNSpKc&index=10>

Développer et réduire une expression

<https://www.youtube.com/watch?v=4PTioyfnmqc&list=PLVUDmbpupCardw9Q239DCa2mKVYuNSpKc&index=16>

EXERCICE : Développer et réduire une expression

<https://www.youtube.com/watch?v=Dy0mS7kkAD8&list=PLVUDmbpupCardw9Q239DCa2mKVYuNSpKc&index=17>

Développer en utilisant la distributivité (Troisième)

https://www.youtube.com/watch?v=RuWyHq2sABE&list=PLVUDmbpupCapDP_pF-9PSveA3Na5lb6DX&index=3

EXERCICE : Développer en utilisant la distributivité (Troisième)

https://www.youtube.com/watch?v=2eb4X5emR4g&list=PLVUDmbpupCapDP_pF-9PSveA3Na5lb6DX&index=5

II) Factoriser une expression littérale

Définition : Factoriser une expression, c'est transformer une somme ou une différence en un produit.

Propriété : k, a, b sont trois nombres relatifs. Alors $k \times a + k \times b = k \times (a+b)$ et $k \times a - k \times b = k \times (a-b)$

Exemples : Factoriser les expressions suivantes :

- $21x - 14 = 7 \times 3x + 7 \times 2 = 7(3x+2)$
- $24x^2 - 16x = 4x \times 6x - 4x \times 4 = 4x(6x-4)$

Remarque : Lorsque l'on sort le diviseur commun de l'expression, ceci revient à effectuer une division. Factoriser et développer sont donc deux procédés inverses l'un de l'autre.

Méthode : Pour effectuer correctement une factorisation, il faut observer chaque nombre dans l'expression.

- On commence par chercher un diviseur commun à chacun des nombres. La lettre x peut être considérée comme un diviseur si elle apparaît dans chaque terme.
- Lorsqu'on la trouve, on écrit chaque nombre comme le produit de ce diviseur et du quotient correspondant.
- Pour finir, on "sort" de l'expression ce diviseur, et on écrit entre parenthèse ce qu'il reste.

Application : Factoriser l'expression $3x^2 + 6x - 12$.

- On remarque que 3, 6, et 12 sont divisibles par 3. 3 est donc un diviseur commun aux trois nombres, on va donc factoriser par 3.
- On écrit alors l'expression avec les produits correspondants :

$$3x^2 + 6x - 12 = 3 \times 1x^2 + 3 \times 2x - 3 \times 4$$

- Il ne reste plus qu'à sortir le 3 de l'expression, et écrire ce qu'il reste entre parenthèses:

$$3 \times 1x^2 + 3 \times 2x - 3 \times 4 = 3(1x^2 + 2x - 4) = 3(x^2 + 2x - 4)$$

Vidéos :

Le cours – La distributivité (développer, factoriser) (Quatrième)

<https://www.youtube.com/watch?v=zRBOouW-O1c&list=PLVUDmbpupCardw9Q239DCa2mKVYuNSpKc>

Le cours – Factorisations (Troisième)

https://www.youtube.com/watch?v=JVnzqtfXf4&list=PLVUDmbpupCapywA8L7SU16KS-9Q6j7_XZ&index=1

Forme factorisée VS forme développée

https://www.youtube.com/watch?v=FTi9WOQsq3w&list=PLVUDmbpupCapywA8L7SU16KS-9Q6j7_XZ&index=2

Factoriser en reconnaissant un facteur commun (1)

https://www.youtube.com/watch?v=r3AzqvgLcl8&list=PLVUDmbpupCapywA8L7SU16KS-9Q6j7_XZ&index=3

Factoriser en reconnaissant un facteur commun (2)

https://www.youtube.com/watch?v=5dCsR85qd3k&list=PLVUDmbpupCapywA8L7SU16KS-9Q6j7_XZ&index=5

EXERCICE : Factoriser en reconnaissant un facteur commun (1)

https://www.youtube.com/watch?v=WXNlyUjQvCo&list=PLVUDmbpupCapywA8L7SU16KS-9Q6j7_XZ&index=4

EXERCICE : Factoriser en reconnaissant un facteur commun (2)

https://www.youtube.com/watch?v=sXCg6l795C4&list=PLVUDmbpupCapywA8L7SU16KS-9Q6j7_XZ&index=6

III) Double distributivité

Comparé à la distributivité simple, il se peut que le terme à distribuer ne soit pas un simple nombre mais une expression entre parenthèse. On parle alors de double distributivité.

Propriété : Soient a, b, c, d quatre nombres relatifs. Alors $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$.

Remarque : Là aussi, attention aux signes lorsque l'on distribue !

Exemples : L'utilisation de couleurs peut ici s'avérer très utile pour savoir où l'on en est :

- $(x+1)(x+3) = x \times x + x \times 3 + 1 \times x + 1 \times 3 = x^2 + 3x + x + 3 = x^2 + 4x + 3$
- $(x-1)(2+x) = (x+(-1))(2+x) = x \times 2 + x \times x + (-1) \times 2 + (-1) \times x = 2x + x^2 - 2 - x = x^2 + x - 2$
- $(3x-1)(x^2-4) = 3x \times x^2 + 3x \times (-4) + (-1) \times x^2 + (-1) \times (-4) = 3x^3 - 12x - x^2 + 4$

Vidéos :

Développer en utilisant la double distributivité (1)

https://www.youtube.com/watch?v=YS-3JI_z2f0&list=PLVUDmbpupCapDP_pF-9PSveA3Na5lb6DX&index=3

Développer en utilisant la double distributivité (2)

https://www.youtube.com/watch?v=1EPOmbvoAlU&list=PLVUDmbpupCapDP_pF-9PSveA3Na5lb6DX&index=4

EXERCICE : Développer une expression (les trois dernières)

https://www.youtube.com/watch?v=2eb4X5emR4g&list=PLVUDmbpupCapDP_pF-9PSveA3Na5lb6DX&index=5

IV) Utiliser le calcul littéral pour résoudre un problème

Méthode : Pour réfuter (invalider) une conjecture (une hypothèse), il suffit de donner un contre-exemple. Pour valider une conjecture, on utilise le calcul littéral.

Exemples :

- "La somme de deux nombres entiers consécutifs est toujours paire."
Faux car $7 + 8 = 15$
- "La somme de trois nombres entiers consécutifs est toujours un multiple de 3"
Vrai car $x + (x+1) + (x+2) = 3x + 3 = 3(x+1)$. C'est donc bien un multiple de 3.
- "Le programme ci-dessous donne toujours le double du nombre de départ"

Vrai car en appelant ce nombre de départ x on a :

- $x + 1$
- $(x + 1)^2 = (x + 1)(x + 1) = x^2 + 2x + 1$
- $x^2 + 2x + 1 - x^2 = 2x + 1$
- $2x + 1 - 1 = 2x$

Donc on obtient bien le double de x .

- "La somme de trois nombres premiers distincts n'est jamais un nombre premier"

Faux car $3 + 5 + 11 = 19$ et 19 est premier.

- Choisir un nombre.
- Ajouter 1.
- Calculer le carré du résultat obtenu.
- Soustraire le carré du nombre de départ.
- Soustraire 1.

En conclusion : Si l'on veut montrer qu'une affirmation est fausse, il faut réfléchir à un contre-exemple. Parfois, les contre-exemples les plus simples sont les plus efficaces. Cependant, si l'on veut montrer qu'une affirmation est vraie pour n'importe quel nombre, on doit utiliser un nombre « aléatoire ». On remplace donc ce nombre par x et on démontre la propriété énoncée.

Vidéos :

Résoudre un problème à l'aide du calcul littéral

https://www.youtube.com/watch?v=g1tyDEz71hw&list=PLVUDmbpupCapDP_pF-9PSveA3Na5lb6DX&index=8

Prouver une propriété à l'aide du calcul littéral

https://www.youtube.com/watch?v=-h9kFZcULz8&list=PLVUDmbpupCapDP_pF-9PSveA3Na5lb6DX&index=9

Que veut dire conjecturer ?

https://www.youtube.com/watch?v=_135AA-4pD8&list=PLVUDmbpupCapDP_pF-9PSveA3Na5lb6DX&index=11

Prépare ton brevet – Développement, équations

https://www.youtube.com/watch?v=EMC77Z31S2w&list=PLVUDmbpupCapDP_pF-9PSveA3Na5lb6DX&index=10

EXERCICES – CHAPITRE 4

I) Développer et réduire une expression littérale, p.22

1 Développe puis réduis chaque expression.

$$A = 2(x + 3)$$

$$B = 5(10x + 8)$$

$$C = 4(3x + 1)$$

$$D = -5(2 - x)$$

$$E = -3(4 + x)$$

$$F = 7(x - 9)$$

2 Même énoncé qu'à l'exercice 1.

$$G = x(x + 6)$$

$$H = 3x(2 + 3x)$$

$$J = x(4 - x)$$

3 Même énoncé qu'à l'exercice 1.

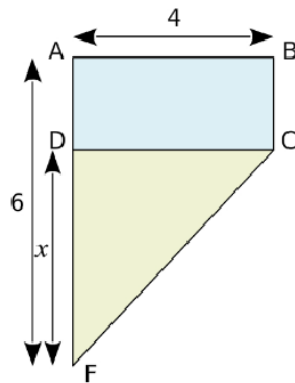
$$M = 3(4x + 7) + 4(2x - 9)$$

$$K = -5x(2x - 3)$$

$$L = 9x(6 - 6x)$$

$$N = 7x(2x - 5) - x(2x - 5)$$

4 On considère la figure ci-contre où les dimensions sont données en cm et les aires en cm^2 . ABCD est un rectangle. Le triangle DCF est rectangle en D.



Dans cette question, on a : $AB = 4$; $AF = 6$ et $DF = 2$.

a. Calcule l'aire du rectangle ABCD.

b. Calcule l'aire du triangle DCF.

Dans la suite du problème :

$AB = 4$; $AF = 6$; $DF = x$ et $AD = 6 - x$.

c. Montre que l'aire du rectangle ABCD est de $24 - 4x$.

d. Montre que l'aire du triangle DCF est $2x$.

e. Résous l'équation $24 - 4x = 2x$.

f. Pour quelle valeur de x l'aire du rectangle ABCD est-elle égale à l'aire du triangle DCF ?

II) Factoriser une expression littérale, p. Et Cahier de 4^e, p.40.

2 Pour chaque question, une seule proposition est juste. Entoure-la.

	P1	P2	P3
$5x + 15 =$	$20x$	$5(x + 3)$	$5(x + 15)$
$36 - 6x =$	$x(x - 6)$	$6(x - 6)$	$6(6 - x)$
$3x^2 - 12x =$	$3x(x - 4)$	$3x(3x - 12)$	$x(3x^2 - 12)$

3 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

	P1	P2	P3
$3x + 18 =$	$21x$	$3(x + 18)$	$3(x + 6)$
$25 - 5x =$	$5(5 - x)$	$5(x - 5)$	$x(x - 5)$
$2x^2 - 10x =$	$2x(2x - 10)$	$2x(x - 5)$	$x(2x^2 - 10)$

1 Entoure les expressions factorisées.

4 Souligne le facteur commun, puis factorise chaque expression.

$$A = 3 \times x + 3 \times 11$$

$$E = 5 \times x - 5 \times 12$$

$$B = 9 \times x + 9 \times 8$$

$$F = 7 \times x - 7 \times 4$$

5 Complète, puis factorise chaque expression.

$$J = 5y + 25$$

$$L = 6y - 42$$

$$J = 5 \times y + 5 \times \dots$$

$$L = 6 \times y - 6 \times \dots$$

$$K = 72 + 9y$$

$$M = 8 - 2y$$

$$K = 9 \times \dots + 9 \times \dots$$

$$M = 2 \times \dots - 2 \times \dots$$

9 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

$$W = 7x^2 + 14x$$

$$Y = 15z^2 - 40z$$

$$X = -24y + 54y^2$$

$$Z = -21t - 18t^2$$

a. $4x - (x - 3)$

b. $x + (2x + 3)$

c. $5(x - 3)$

$$C = 2 \times 4 + 4 \times x$$

$$D = 5 \times 6 + 6 \times x$$

d. $4x^2 + 8x + 4$

e. $2x(x + 4)$

f. $6x + 3$

$$G = 10 \times 3 - 10 \times x$$

$$H = 6 \times 8 - 8 \times x$$

8 Factorise chaque expression.

$$N = 4a^2 + 3a$$

$$S = a - 6a^2$$

$$P = 2b^2 + b$$

$$T = 5b - 4b^2$$

$$Q = 6c + 7c^2$$

$$U = 10c^2 - 9c$$

$$R = -8d + 5d^2$$

$$V = -3d^2 - 7d$$

III) Double distributivité

1 Complète la table de multiplication pour développer les expressions.

$$A = (u + 5)(4 + u)$$

$\times$	u	$+ 5$
4		
$+ u$		

$$B = (v - 4)(2v - 3)$$

$\times$		

2 Développe puis réduis chaque expression.

$$C = (2x + 5)(3x + 7)$$

$$C = 2x \times \dots + 2x \times \dots + 5 \times \dots + 5 \times \dots$$

$$C = \dots$$

$$C = \dots$$

$$D = (x + 1)(x + 5)$$

3 Même énoncé qu'à l'exercice 2.

$$G = (5t + 8)(2t - 7)$$

.....

.....

.....

$$H = (2x - 5)(3x - 2)$$

.....

.....

.....

$$J = (5y + 1)(2 - 3y)$$

.....

.....

.....

$$E = (4x + 5)(2x + 6)$$

.....

.....

.....

$$F = (2 + x)(5x + 4)$$

.....

.....

.....

$$K = (-3 + z)(-2z - 5)$$

.....

.....

.....

IV) Utiliser le calcul littéral

5 On considère le programme de calcul :

- Choisis un nombre.
- Calcule son double.
- Soustrais 1.
- Calcule le carré du résultat obtenu.
- Soustrais 64.

a. Montre que, si on choisit 4 comme nombre de départ, on obtient - 15.

.....

.....

.....

.....

b. Si on appelle x le nombre de départ, écris une expression qui traduit le programme.

.....

.....

.....

.....

c. On considère $G = (2x - 1)^2 - 64$. Factorise G .

.....

.....

.....

.....

d. Pour chaque valeur de x , calcule la valeur de G , en précisant l'expression de la question **c** utilisée.

• $x = 0$:

.....

.....

• $x = \frac{1}{2}$:

.....

.....

• $x = -\frac{7}{2}$:

.....

.....

• $x = \frac{9}{2}$:

.....

.....

2 Voici un programme de calcul.

- Choisir un nombre
- Multiplier ce nombre par 4
- Ajouter 8
- Multiplier le résultat par 2

a. Vérifie que, si on choisit le nombre -1 , ce programme donne 8 comme résultat final.

.....
.....

b. Le programme donne 30 comme résultat final, quel est le nombre choisi au départ ?

.....
.....
.....

Dans la suite de l'exercice, on nomme x le nombre choisi au départ.

c. L'expression $E = 2(4x + 8)$ donne le résultat du programme de calcul précédent pour un nombre x donné. On pose $F = (4 + x)^2 - x^2$. Prouve que les

expressions E et F sont égales pour toutes les valeurs de x .

.....
.....
.....

d. Pour chacune des affirmations suivantes, indique si elle est vraie ou fausse. On rappelle que les réponses doivent être justifiées.

- **Affirmation 1 :** Ce programme donne un résultat positif pour toutes les valeurs de x .

.....
.....
.....

- **Affirmation 2 :** Si le nombre x choisi est un nombre entier, le résultat obtenu est un multiple de 8.

.....
.....
.....