

CHAPITRE 11 – ÉQUATIONS

1) Rappels sur les équations

1) Notion d'équations, équation du premier degré

Définition : Une *équation* est une égalité dans laquelle figurent un ou plusieurs nombres inconnus, désignés le plus souvent par des lettres.

Exemple : $3x + 2 = 5x - 4$ est une équation. On rappelle que la partie à gauche du symbole "=" s'appelle le membre de gauche, et celle à droite s'appelle le membre de droite.

2) Solution d'une équation

Définition : Une *solution* d'une équation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'égalité est vraie. *Résoudre* une équation, c'est trouver toutes ses solutions.

Exemple : Le nombre 3 est solution de l'équation $3x + 2 = 5x - 4$. En effet :

- D'une part, on calcule le membre de gauche pour $x = 3$: $3 \times 3 + 2 = 11$
- D'autre part, on calcule le membre de droite pour $x = 3$: $5 \times 3 - 4 = 11$

On obtient le même résultat dans les deux membres, donc on conclut que " $x=3$ est la solution de l'équation $3x + 2 = 5x - 4$ "

Propriété : Une équation du 1^{er} degré à une inconnue est de la forme $ax + b = cx + d$, où a, b, c, d sont quatre nombres avec a et c non nul. Une telle équation admet *aucune, une ou une infinité* de solution.

Mais en pratique, celles étudiées n'en auront qu'une seule dans le cas général. Il s'agit donc de se donner des méthodes pour arriver à trouver la solution de chaque équation qui peut se présenter à nous. Deux outils, sous formes de propriétés, peuvent être utilisés :

Propriétés : Les opérations suivantes ne perturbent pas une égalité :

- 1) Une égalité reste vraie si on ajoute (ou si on soustrait) un même nombre à ses deux membres.
- 2) Une égalité reste vraie si on multiplie (ou si on divise) ses deux membres par un même nombre.

Exemples :

La solution de $4x + 2 = 6$ est la même que celle :

- de $4x + 6 = 10$ (ajouté 4 de chaque côté)
- de $4x - 4 = 0$ (soustrait 6 de chaque côté)
- de $5x + 2 = 6 + x$ (ajouté x de chaque côté)

La solution de $4x + 2 = 6$ est la même que celle :

- de $8x + 4 = 12$ (produit par 2 de chaque côté)
- de $2x + 1 = 3$ (divisé par 2 de chaque côté)

On peut alors modifier l'écriture des équations pour déterminer leur solution. En effet :

- $-2x + 3 = 7$ correspond à $-2x + 3 - 3 = 7 - 3$ donc $-2x = 4$. Ici, la solution $x = -2$ est évidente.
- $5x = 3x + 6$ correspond à $5x - 3x = 3x + 6 - 3x$ donc $2x = 6$. Ici, la solution est $x = 3$.
- $3x + 1 = 2x - 4$ correspond à $3x - 2x = -4 - 1$ donc $-5x = -5$. Ici, la solution est $x = 1$.

A retenir : Pour passer un terme de l'autre côté de l'équation, on ajoute son opposé dans les deux membres de l'équation.

Vidéos :	Vérifier si un nombre est solution d'une équation
	https://www.youtube.com/watch?v=PLuSPM6rJKI&list=PLVUDmbpupCap9__omIxfdwJsTQKaTQ5vj&index=2
	EXERCICE : Vérifier si un nombre est solution d'une équation
	https://www.youtube.com/watch?v=aC17g0UgdwI&list=PLVUDmbpupCap9__omIxfdwJsTQKaTQ5vj&index=3
	Mettre un problème en équation
	https://www.youtube.com/watch?v=q3ijSWk1iF8&list=PLVUDmbpupCap9__omIxfdwJsTQKaTQ5vj&index=4
	EXERCICE : Mettre un problème en équation
	https://www.youtube.com/watch?v=I_wd09qH5LQ&list=PLVUDmbpupCap9__omIxfdwJsTQKaTQ5vj&index=5

II) Résoudre une équation : cas général

La méthode pour résoudre une équation reste la même dans tous les cas mais elle sera à décliner selon la forme de l'équation. Elle est présentée ci-dessous et appliquée dans trois cas distincts par la suite.

Méthode :

- 1) **Résoudre** l'équation :
 - a) Regrouper tous les termes « *en x* » (variables) dans un membre de l'équation.
 - b) Regrouper tous les termes « *sans x* » (constants) dans l'autre membre.
 - c) Réduire les expressions dans les membres.
 - d) Puis isoler x (par une division en général).
- 2) **Vérifier** que la valeur trouvée est bien solution de l'équation.
- 3) **Conclure**.

1) Equations de la forme $x + a = b$

Ces équations sont les plus simples car elles sont uniquement à deux étapes de la solutions. La variable est déjà isolée et reliée à une constante par soit une addition soit une soustraction, il n'y aura donc pas de division finale à faire (**étape 1d**). De plus, cette variable est la seule, donc l'étape 1a) n'est pas non plus nécessaire. Il faut donc simplement :

- Regrouper les termes constants ensemble d'un même côté (**1b**)
- Calculer le résultat obtenu de ce côté en réduisant (**1c**)

Exemples 1 : On souhaite résoudre ces deux équations.

$x + 8 = 19$	$x - 7 = - 8$	
$x + 8 - 8 = 19 - 8$	$x - 7 + 7 = - 8 + 7$	→ On isole le terme x .
$x = 11$	$x = - 1$	→ On simplifie.
11 est la solution de l'équation $x + 8 = 19$.	- 1 est la solution de l'équation $x - 7 = - 8$.	→ On donne la solution.

2) Equations de la forme $ax = b$

Cette fois, la variable n'est pas isolée et est reliée par une multiplication à une constante. On aura donc à diviser (**étape 1d**) pour l'isoler. On remarquera que (**1a**) et (**1b**) sont inutiles car il n'y a qu'un terme variable et qu'un seul terme constant, et par conséquent il n'y a rien à réduire, donc (**1c**) est inutile aussi. Il faut donc simplement :

- Isoler la variable en divisant de chaque côté par le nombre devant elle (**1d**).

Exemples 2 : On souhaite résoudre ces deux équations.

$4x = 18$	$\frac{x}{3} = 2,5$	
$4x \div 4 = 18 \div 4$	$\frac{x}{3} \times 3 = 2,5 \times 3$	→ On isole le terme x .
$x = 4,5$	$x = 7,5$	→ On simplifie.
4,5 est la solution de l'équation $4x = 18$.	7,5 est la solution de l'équation $\frac{x}{3} = 2,5$.	→ On donne la solution.

Vidéos :	Résoudre une équation (2) https://www.youtube.com/watch?v=mK8Y-v-K0cM&list=PLVUDmbpupCap9_omIxfdwJsTQKaTQ5vj&index=8
	Résoudre une équation (3) https://www.youtube.com/watch?v=BOq2Lk9Uyw8&list=PLVUDmbpupCap9_omIxfdwJsTQKaTQ5vj&index=9

3) Cas général $ax + b = cx + d$

Comme il s'agit du cas général, il existe des situations où les quatre étapes de la méthode sont à appliquer. L'exemple ci-après illustre ceci. Mais il existe aussi des cas où seules certaines étapes sont à réaliser, et pas d'autres. C'est au cas par cas. Quelques remarques tout de même :

- Attention aux signes en envoyant des constantes dans l'autre membre (par addition ou soustraction), il faut penser à prendre l'opposé.
- L'ensemble des techniques opératoires vues pendant l'année peuvent être mises à contribution ici (sur les relatifs, les fractions, les décimaux, etc..)
- Le résultat n'est pas toujours un nombre entier, il se peut que ce soit une fraction
- Après l'étape finale, on pourra penser à simplifier le résultat si c'est une fraction.

Exemple 3 : On souhaite résoudre cette équation.

$-3x + 5 = 12$	
$-3x + 5 - 5 = 12 - 5$	→ On soustrait 5 aux deux membres en appliquant la propriété 1.
$-3x = 7$	→ On réduit.
$\frac{-3x}{-3} = \frac{7}{-3}$	→ On divise par -3 les deux membres en appliquant la propriété 2.
$x = -\frac{7}{3}$	→ On réduit.
$-\frac{7}{3}$ est la solution de l'équation $-3x + 5 = 12$.	

Remarques :

- Concernant la rédaction, on pensera à aligner les symboles " $=$ " afin de bien distinguer ce qui a été fait dans chaque membre de l'équation.
- Cette méthode ne fonctionne que lorsque l'équation se présente bien sous la forme $ax + b = cx + d$. Si ce n'est pas le cas, il faut d'abord faire en sorte que l'équation se présente sous cette forme avec les outils classiques : distributivité, double distributivité, réduction, etc.

Exemple : $2(x+3) = 5x - 4$ ne peut être résolue directement, il faut développer : $2(x+3) = 5x - 4$ revient à $2x + 6 = 5x - 4$. C'est à partir de là que l'on peut utiliser la méthode :

$$2x + 6 = 5x - 4 \quad \Rightarrow \quad 2x - 5x = -4 - 6 \quad \Rightarrow \quad -3x = -10 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-10}{-3} = \frac{10}{3}$$

Ressource : Pour s'entraîner à travailler sur ce genre d'équation, je vous conseille le logiciel THOT créé par Emmanuel MORAND et disponible à l'adresse ci-bas. Il s'agit d'un logiciel vous proposant une équation à résoudre et des outils pour la résoudre pas à pas. Il y a même un indicateur que votre solution est la bonne. <http://www.emmanuelmorand.net/thot/telechargement.php>

Vidéos : Mettre un problème en équation (1)
<https://www.youtube.com/watch?v=Xn8rUSZPO34&list=PLVUDmbpupCag2R9lshWHo7HOI28SiStNd&index=12>
 Résoudre une équation (4)
https://www.youtube.com/watch?v=QURskM271bE&list=PLVUDmbpupCap9__omIxfdwJsTQKaTQ5vj&index=10
 EXERCICE : Résoudre une équation (1)
https://www.youtube.com/watch?v=9rCgwGqJv6I&list=PLVUDmbpupCap9__omIxfdwJsTQKaTQ5vj&index=10
 EXERCICE : Résoudre une équation (2)
https://www.youtube.com/watch?v=-IfzunHS6Z8&list=PLVUDmbpupCap9__omIxfdwJsTQKaTQ5vj&index=11

III) Un cas particulier : les équations produit nul

Définition : Une équation produit nul est une équation s'écrivant sous la forme $(ax+b)(cx+d) = 0$

Rappel : Le produit de deux nombres est nul seulement si l'un des deux nombres est nul. Ceci s'étend alors aux équations produit nul.

Propriété : Une équation produit nul admet toujours deux solutions. La première est la solution de $ax + b = 0$, la seconde est celle de $cx + d = 0$.

Ceci signifie en de termes très simples qu'une expression de la forme $(ax+b)(cx+d)$ est nulle seulement si un de ses terme est nul.

Exemple : On considère l'équation $(x - 6)(2x + 3) = 0$. Selon la propriété précédente, les solutions de cette sont celles telles que $x - 6 = 0$ ou $2x + 3 = 0$. Il suffit donc de les résoudre indépendamment :

$$\begin{array}{lll} x - 6 = 0 & 2x + 3 = 0 & \text{Ces deux nombres sont ainsi les} \\ \Rightarrow x = 6 & \Rightarrow 2x = -3 & \text{solutions de l'équation} \\ & \Rightarrow x = -\frac{3}{2} & (x - 6)(2x + 3) = 0 \end{array}$$

Vidéos : Résoudre une équation produit nul
<https://www.youtube.com/watch?v=APj1WPPNUgo&list=PLVUDmbpupCag2R9lshWHo7HOI28SiStNd&index=10>
 EXERCICE : Résoudre une équation produit nul
<https://www.youtube.com/watch?v=4CWk30Ypj04&list=PLVUDmbpupCag2R9lshWHo7HOI28SiStNd&index=11>
 Mettre un problème en équation (2)
https://www.youtube.com/watch?v=fIObKE_CyHw&list=PLVUDmbpupCag2R9lshWHo7HOI28SiStNd&index=13
 Le cours - équations
<https://www.youtube.com/watch?v=WoTpA2RyuVU&list=PLVUDmbpupCag2R9lshWHo7HOI28SiStNd&index=1>
 Prépare ton brevet : Développement, équations
<https://www.youtube.com/watch?v=EMC77Z31S2w&list=PLVUDmbpupCag2R9lshWHo7HOI28SiStNd&index=14>
 Prépare ton brevet : Factorisation, équations
<https://www.youtube.com/watch?v=j-Knv-oJS0&list=PLVUDmbpupCag2R9lshWHo7HOI28SiStNd&index=15>
 Prépare ton brevet : Scratch, équations
<https://www.youtube.com/watch?v=nBTXFN5J0-w&list=PLVUDmbpupCag2R9lshWHo7HOI28SiStNd&index=16>
 QCM : Les équations
<https://www.youtube.com/watch?v=BriTPYIjQwo&list=PLVUDmbpupCag2R9lshWHo7HOI28SiStNd&index=17>

EXERCICES – CHAPITRE 11

I) Rappel sur les équations, p.65 cahier de 4ème

3 Le nombre 3 est-il solution de chacune de ces équations ?

a. $4x + 2 = 5$ 	b. $7 - 5x = -8$ 	c. $1,5x - 4,5 = 0$
---	--	---

4 Le nombre - 2 est-il solution de chacune de ces équations ?

a. $7x - 3 = 6x - 5$ Pour $x = -2$, on calcule : • d'une part, $7x - 3$ = • d'autre part, $6x - 5$ = Ces résultats sont donc - 2 	b. $4x - 7 = 7x + 1$ 	c. $-2,7x + 5 = 3,3x - 6,2$
--	--	---

5 a. Complète les tableaux de valeurs suivants.

x	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3	4
$3 - 6x$								

x	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3	4
$7 - 2x$								

b. En t'aidant de ces tableaux, indique si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses.

- | | |
|--|--|
| • 0 est solution de $3 - 6x = 3$ V F
• - 3 est solution de $3 - 6x = -15$ V F
• - 2 est solution de $7 - 2x = 1$ V F
• 1 est solution de $7 - 2x = 5$ V F | • 2 est solution de $3 - 6x = 7 - 2x$ V F
car
• - 1 est solution de $3 - 6x = 7 - 2x$ V F
car |
|--|--|

II) Résoudre une équation, cas général, p33

1 Résous chaque équation.

a. $8x + 3 = 0$ 	b. $2x - 9 = 0$ 	c. $49 - 7x = 0$ 	d. $-6x - 5 = 0$
---	---	--	--

e. $5x + 12 = 3$	f. $10x + 1 = -7$	g. $9x - 2 = 6$	h. $20 - 4x = -4$
------------------	-------------------	-----------------	-------------------

2 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

a. $2x = -2x + 8$	b. $4x - 8 = 7x + 4$	c. $3x + 5 = 6x - 9$
-------------------	----------------------	----------------------

3 Trouve le nombre auquel je pense.

- Je pense à un nombre.
- Je lui soustrais 10.
- J'élève le tout au carré.
- Je soustrais au résultat le carré du nombre auquel j'ai pensé.
- J'obtiens alors : - 340



a. Pour chaque tarif, calcule le prix de 8 séances.

.....

.....

b. On appelle x le nombre de séances. Exprime en fonction de x le prix payé avec les tarifs A, puis B.

.....

.....

c. Quel est le nombre de séances pour lequel le tarif A est égal au tarif B ?

.....

.....

4 Le ciné-club d'un village propose 2 tarifs.

Tarif A

Adhésion annuelle : 21 €
puis 1,50 € la séance

Tarif B

5 € la séance
sans carte d'adhésion

.....

.....

.....

III) Equations produit nul, p.34

1 Résous chaque équation.

a. $(3x + 1)(x - 9) = 0$

.....

.....

.....

b. $(6x + 7)(4x - 11) = 0$

.....

.....

c. $(9x - 3)(-5x - 13) = 0$

.....

.....

.....

2 Même énoncé qu'à l'exercice **1**.

a. $4(2 + 3x) - (x - 5) = 0$

.....

.....

.....

.....

b. $4(2 + 3x)(x - 5) = 0$

.....

.....

.....

3 On donne $A = (2x - 6)(x + 2) + 5(x + 2)$.

a. Factorise A.

$A = (2x - 6)(x + 2) + 5(x + 2)$

A =

.....

b. Calcule A pour $x = 3$.

.....

.....

.....

c. Résous l'équation $A = 0$.

.....

.....

.....