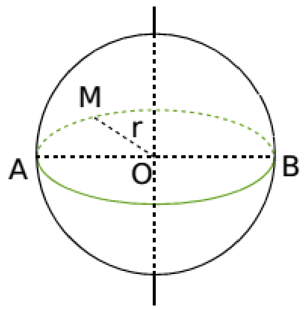
CHAPITRE 6 – SPHÈRES ET BOULES

I) Définition des objets

Définition : La *sphère* de centre O et de rayon r ($r > 0$) est l'ensemble des points M de l'espace tels que OM = r. Ce solide est généré par un *demi-cercle en rotation* autour de son diamètre. La *boule* de centre O et de rayon r ($r > 0$) est l'ensemble des points M de l'espace tels que OM ≤ r. Ce solide est généré par un *demi-disque en rotation* autour de son diamètre.



Remarques :
• On peut dire que la sphère est l'enveloppe de la boule.
• [AB] est un *diamètre* de la sphère (segment qui joint 2 points de la sphère passant par le centre de la sphère).
• Le cercle de diamètre [AB] est un *grand cercle* de la sphère (*ici cercle de centre O et de rayon r*).

Application : Dans chaque cas, préciser si l'objet peut être assimilé à une sphère ou à une boule :

• Une balle de tennis	• Un ballon de foot	• La Lune
• Un ballon gonflable	• Une bille de billard	• Un ballon de basket
• Une bille	• Une orange	• Une boule de glace

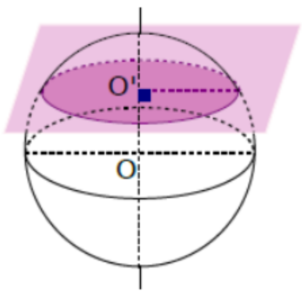
II) Section planes d'une sphère

Définition : On appelle *section* d'un solide par un plan l'intersection de ce solide et du plan.

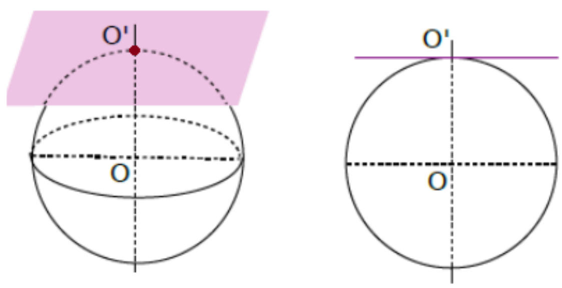
Propriété : La section d'une sphère par un plan est un cercle.

Remarques :
• Le rayon de la section est toujours plus petit ou égal au rayon de la sphère.
• Dans le cas où le plan de section passe par le centre de la sphère, le rayon de la section est égal au rayon de la sphère. La section est alors appelée *grand cercle*.
• Quand la distance du plan au centre de la sphère correspond au rayon de la sphère, la section est alors réduite à un point. On dit que le plan est *tangent* à la sphère en ce point.

Illustration : Section quelconque



Section tangente vue de haut et de face



Vidéo : Calculer une longueur dans un solide (sphère)
https://www.youtube.com/watch?v=NY75MafJJ3Y&list=PLVUDmbpupCapkcPRuI4I0OQPlGjjSnszj&index=11

III) Aires et volumes, résolution de problème

Propriétés :

• On calcule le volume d'une boule de rayon r avec la formule suivante : $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

• On calcule l'aire d'une sphère de rayon r avec la formule suivante : $A=4\pi r^2$

Remarque : Comme la sphère est creuse, elle n'a pas de volume...

Exemples : 1) Calculer l'aire exacte d'une sphère de rayon 4,2 cm puis l'arrondi au cm².
2) Calculer le volume exact d'une boule de diamètre 12 cm puis l'arrondi au mm³.

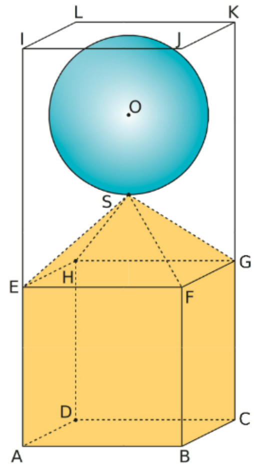
1) $A=4\pi R^2=4\pi\times 4{,}2^2=70{,}56\pi\approx 222\,cm^2$ cm².
L'aire d'une sphère de rayon 4,2 cm est de $70{,}56\pi$ cm² soit environ 222 cm².

2) $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\times\pi\times 6^3=288\pi\approx 904{,}779\,cm^3$

Le volume exacte d'une boule de diamètre 12 cm est de 288π cm³ soit environ 904,779 cm³.

Vidéos : Calculer l'aire et le volume d'une boule
https://www.youtube.com/watch?v=YQF7CBY-uEk&list=PLVUDmbpupCapkcPRuI4I0OQPlGjjSnszj&index=7
EXERCICE : Calculer des volumes (boule, cylindre)
https://www.youtube.com/watch?v=ZnB0RIPlIsw&list=PLVUDmbpupCapkcPRuI4I0OQPlGjjSnszj&index=8

Exemple : ***Type D.N.B (Extrait du manuel IParcours – p.82) :***



La figure n'est pas en vraie grandeur.

On considère les trois solides suivants :
• la boule de centre O et de rayon SO tel que SO = 3 cm ;
• la pyramide SEFGH de hauteur 3cm de base carrée EFGH de côté 6 cm ;
• le cube ABCDEFGH d'arête 6 cm.

Ces trois solides sont placés dans un récipient.
Ce récipient est représenté par le pavé droit ABCDIJKL de hauteur 15 cm dont la base est le carré ABCD de côté 6 cm.

1) Calculer le volume du cube ABCDEFGH en cm³.
2) Calculer le volume de la pyramide SEFGH en cm³.
3) Calculer le volume de la boule en cm³. (On arrondira à l'unité près.)
4) En déduire le volume occupé par les trois solides à l'intérieur du pavé ABCDIJKL en cm³.
5) Pourra-t-on verser dans ce récipient 20 cl d'eau sans qu'elle ne déborde ?

Solution :

1) $V_{cube}=c^3=6^3=216\,cm^3$ Le volume du cube ABCDEFGH est de 216 cm³.

2) $V_{pyramide}=\frac{1}{3}\times A_{base}\times h=\frac{1}{3}\times 6^2\times 3=36\,cm^3$. Le volume de la pyramide SEFGH est de 36 cm³.

3) $V_{boule}=\frac{4}{3}\times\pi\times r^3=\frac{4}{3}\times\pi\times 3^3=36\pi\approx 113\,cm^3$. Le volume de la boule est 36πcm³ soit environ 113cm³.

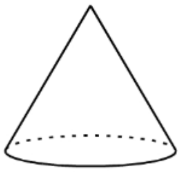
4) $V_{occupé} = V_{cube} + V_{pyramide} + V_{boule} \approx 216+36+113=365$ cm³. Le volume occupé par les trois solides à l'intérieur du pavé ABCDIJKL est d'environ 365 cm³.

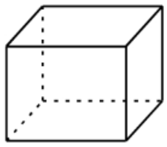
5) $V_{pavé}=L\times l\times h=6\times 6\times 15=540\,cm^3$ cm³. $V_{restant}=V_{pavé}-V_{occupé}\approx 540-365=175\,cm^3=175\,mL=17{,}5\,cL$. On ne pourra pas verser 20 cL d'eau dans ce récipient sans qu'elle ne déborde.

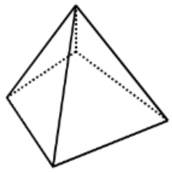
EXERCICES – CHAPITRE 6

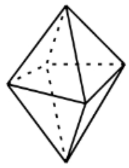
I) Définition des objets, p.79

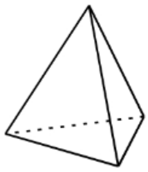
1 Voici plusieurs solides, représentés en perspective cavalière. Donne le nom de chacun d'eux.

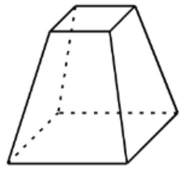

a. ....

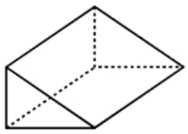

b. ....

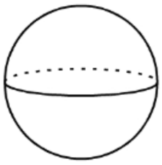

c. ....

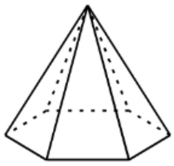

d. ....

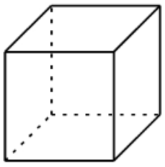

e. ....

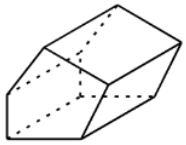

f. ....

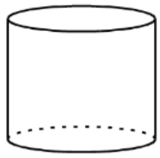

g. ....


h. ....

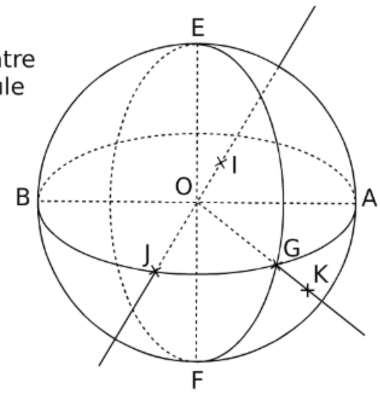

i. ....


j. ....


k. ....


l. ....

2 La figure ci-contre représente une boule de centre O et de diamètre 5 cm.



a. Complète le tableau ci-dessous.

Points appartenant à...

la sphère de centre O de rayon OA	
la boule de centre O de rayon OA	
aucune des deux	

b. Place, sur la figure, le point H, diamétralement opposé à G. Puis place, sur la demi-droite [OG), un point L qui appartient à la boule de rayon OA.

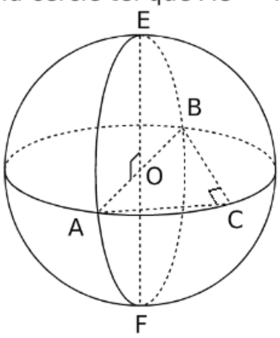
c. Complète.

- [AB] est un .... de la sphère.
- [OG] est un .... de la sphère.
- [OJ] est un .... de la sphère.
- [GH] est un .... de la sphère.
- Le cercle de centre O et de diamètre [EF] est appelé .... de la sphère.

d. Quel est le périmètre du cercle de centre O et de diamètre [EF] ?

....

3 La figure ci-dessous représente une sphère de centre O et de rayon 3 cm. [AB] et [EF] sont deux diamètres perpendiculaires, et C est un point d'un grand cercle tel que AC = 4 cm.



a. Complète.

AB = ... cm ; AO = ... cm.

b. Quelle est la nature du triangle EAO ? Justifie.

....

....

c. Calcule la longueur BC. Arrondis au dixième.

....

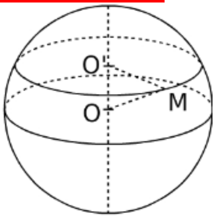
....

....

....

II) Sections planes d'une sphère, p.84

3 On réalise la section d'une sphère, de centre O et de rayon 4 cm, par un plan passant par le point O' situé à 2 cm de O.



a. M étant un point de la section, quelle est la nature du triangle OO'M ?

....

....

b. Calcule la valeur exacte du rayon de la section, puis donne la valeur arrondie au millimètre.

....

....

....

....

....

....

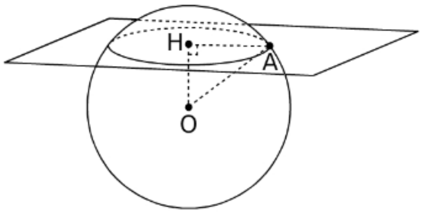
c. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{O'OM}$ à 1° près.

....

....

2 *Section d'une sphère*

On réalise la section de la sphère, de centre O et de rayon OA = 7 cm, par un plan représenté ci-contre.



a. Quelle est la nature de cette section ?

....

....

b. Calcule la valeur exacte du rayon HA de cette section, sachant que OH = 4 cm.

....

....

....

....

III) Volumes, p.80, 81, 82

3 Georges a acheté, pour ses enfants, un ballon gonflable en forme de sphère. Le diamètre de ce ballon est de 30 cm.

a. Calcule le volume du ballon, arrondi au cm^3.

....

....

....

....

b. À présent, Georges doit le gonfler. À chaque expiration, il souffle 500 cm^3 d'air dans le ballon. Combien de fois devra-t-il souffler pour le gonfler au maximum ?

....

....

....

....

c. Quelle est la surface de ce ballon ?

....

....

....

4 Une gélule a la forme d'un cylindre droit, de longueur 1 cm, avec une demi-boule collée à chacune de ses bases, de rayon 3 mm.

a. Reporte sur la figure les longueurs de l'énoncé, exprimées en millimètre.

b. Calcule le volume total exact de la gélule, puis son volume arrondi à l'unité.

....

....

....

....

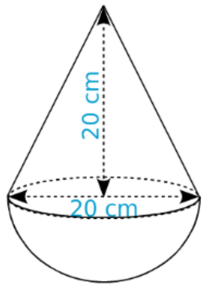
....

....

....

....

1 Le culbuto ci-contre est un jouet pour enfant qui oscille sur une base sphérique.



a. Calcule son volume exact, puis arrondis au cm^3.

....

....

....

....

....

....

b. La base sphérique est remplie de sable. Quelle proportion du jouet est occupée par le sable ?

....

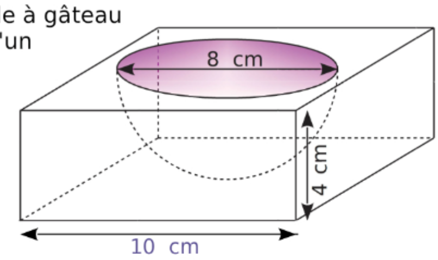
....

....

....

....

2 Ce moule à gâteau a la forme d'un pavé droit à base carrée dans lequel on a évidé une demi-boule.



a. Calcule le volume de plastique nécessaire pour fabriquer ce moule, arrondi au centième de cm^3.

....

....

....

....

b. Ce moule a servi à Catherine pour faire un gâteau qu'elle veut à présent napper de chocolat. Détermine la surface de gâteau à recouvrir, arrondie au centième de cm^2.

....

....

....

....