

Somme des impairs et carré : une démonstration géométrique

Maxime KIENTZ

30 janvier 2022

Prérequis : *Nombre au carré, expression littérale, notion de démonstration d'une propriété*

Niveau : *Collège (3ème)*

Au collège, beaucoup de propriétés sont admises sans être démontrées. Cependant, l'enseignement des mathématiques ne doit pas être parole divine et certains résultats méritent d'être expliqués. L'idée de cet article est de proposer une démonstration d'une propriété sur la somme des premiers nombres impairs. Elle n'est clairement pas au programme mais propose ici un premier exemple de démonstration abordable avec les outils de fin de collège. Elle utilise de plus une méthode classique de démonstration au lycée général (*la récurrence*) permettant d'aller un peu plus loin que le niveau demandé en 3ème, tout en s'appuyant sur une illustration géométrique simple permettant de mieux comprendre ce que l'on effectue comme opérations ici.

1 La propriété

1.1 Une introduction : deux exemples illustratifs

Observons deux sommes qui n'ont l'air de rien : $1 + 3 + 5 = 9$ et $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$. Rien de spécial me direz-vous, mais en observant bien, on se rend compte que les nombres obtenus en résultats sont des carrés parfaits. Mieux encore, ce sont les carrés du nombre d'impairs qu'on a sommé : On a sommé les 3 premiers impairs pour obtenir $9 = 3^2$ et on a sommé les 5 premiers impairs pour obtenir $25 = 5^2$. On peut se rendre compte de cette égalité en disposant les sommes géométriquement comme montré dans la **Figure 1** suivante.

Chaque nombre impair est disposé comme étant un "coin" d'un carré, et on empile les impairs les uns après les autres pour former un carré. La longueur de ce carré correspond alors au nombre n de nombres impairs qu'on a sommé et l'aire de ce carré vaut alors bien n^2

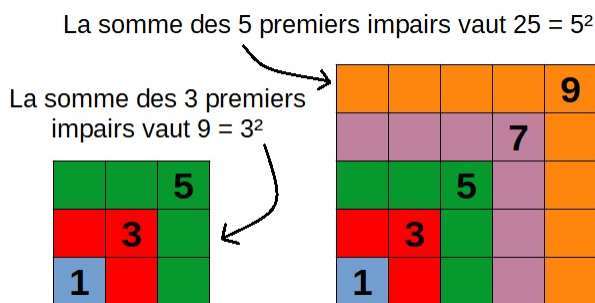


FIGURE 1 – Deux exemples pour la somme des 3 premiers et 5 premiers impairs

Mais cette observation est-elle vraie pour chaque somme de premiers impairs ? Peut-on par exemple affirmer avec certitude que la somme des 100 premiers impairs $1 + 3 + 5 + \dots + 199$ vaut $100^2 = 10000$? Et que se passe-t-il si l'on somme les 1000 premiers impairs ? C'est le but de cet article.

1.2 La propriété générale à démontrer

Commençons déjà par observer comment s'écrit un nombre impair. Un nombre impair est par définition un nombre entier qui n'est pas pair, et on rappelle qu'un nombre pair est par définition un nombre possédant 2 comme diviseur. De ce fait, on peut l'écrire comme étant "*2 fois quelque chose*", et si l'on note n ce quelque chose, on peut alors affirmer qu'un nombre pair s'écrit forcément sous la forme $2n$ pour un certain nombre n . Ensuite, on peut observer que tout nombre impair est en fait un nombre pair auquel on a retiré 1. Ainsi 3 peut s'écrire $3 = 2 - 1$, 7 peut s'écrire $7 = 8 - 1$, et on comprend alors facilement que tout nombre impair peut s'écrire sous la forme $2n - 1$ pour un certain n . Mieux encore, avec cette écriture, $2n - 1$ est le n -ième nombre impair¹.

Avec cette écriture, on peut généraliser ce que l'on veut étudier. La somme des n premiers impairs que l'on veut étudier s'écrit alors : $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$. Comme on veut montrer que cette somme est égale à n au carré, on a alors l'écriture de notre propriété générale que l'on veut démontrer.

Propriété : La somme des n premiers nombres impairs vaut n^2 . En clair : $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

2 Démonstration de la propriété

2.1 L'idée : une démonstration par récurrence

Passons maintenant à la démonstration de cette propriété, c'est-à-dire l'explication qui validera que notre observation est vraie pour toute valeur de n . Pour démontrer cette propriété, nous utiliserons un type de démonstration appelé "*démonstration par récurrence*". On va montrer qu'elle est vraie pour une première valeur (*l'initialisation*), puis on va montrer que si elle est vraie pour une valeur, elle est aussi vraie pour la valeur suivante (*l'hérédité*).

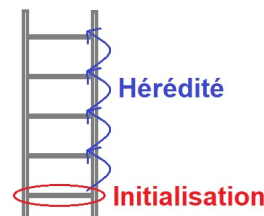
Comme on a montré qu'elle est vraie pour une première valeur, elle sera aussi vraie pour la deuxième par hérédité, puis pour la troisième par hérédité à partir de la deuxième, etc... (*la conclusion*) et sera donc vraie pour toute valeur de n choisie!

Vulgairement, la démonstration par récurrence est le principe d'une échelle.

Pour grimper sur une échelle, je dois être capable :

- De monter sur la première marche.
- De monter sur la marche suivante si je suis sur une marche donnée.

Avec ces deux vérités, je suis capable de grimper sur toute l'échelle...



2.2 La démonstration

Passons à la démonstration de notre propriété! On appliquera ce qu'on a dit auparavant en utilisant donc une démonstration par récurrence.

Démonstration. Procédons étape par étape.

Initialisation : Pour $n = 1$, la somme des "*1 premiers nombres impairs*" vaut juste 1. Et $1 = 1^2$. Notre propriété est donc vraie pour $n = 1$, on est donc capable de monter sur la première marche de l'échelle.

Hérédité : Supposons que la propriété est vraie pour un certain n et montrons qu'elle est vraie pour $n + 1$. On suppose donc que $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ et on peut montrer que $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2(n + 1) - 1) = (n + 1)^2$. Comme la propriété est vraie au rang n , alors on peut disposer cette somme en un carré de côté n et donc d'aire n^2 . On va ajouter intelligemment le $(n + 1)$ -ième nombre impair $2(n + 1) - 1$ à ce carré.

1. C'est ce qui favorise cette écriture ici plutôt que l'écriture classique $2n + 1$ (qui est aussi valide!) dans cet article.

Observons déjà que $2(n+1) - 1 = 2n + 2 - 1 = 2n + 1$. Ce nombre $2n + 1$ peut s'écrire $n + n + 1$, si bien que l'on peut ajouter une "ligne de longueur n " sur le sommet et sur un flanc de notre carré, et ajouter le 1 pour compléter le coin de ce carré. C'est l'illustration montrée dans la **Figure 2** ci-après. Lorsque l'on regarde la figure obtenue, on voit que c'est un carré de longueur $n + 1$, si bien que son aire est maintenant de $(n + 1)^2$

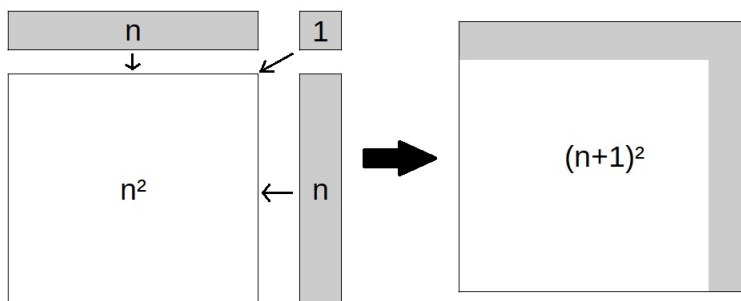


FIGURE 2 – La somme astucieuse et le résultat obtenu

En prenant du recul, on a donc sommé les $n + 1$ premiers nombres impairs et on a obtenus un carré de longueur $n + 1$ et d'aire $(n + 1)^2$. On vient de démontrer ce que l'on voulait : Si la propriété est vraie au rang n , alors elle est aussi vraie au $n + 1$. Si on est sur une marche de l'échelle, on sait donc atteindre la suivante.

Conclusion : On sait que pour $n = 1$, la propriété est vraie selon **l'initialisation**. Or selon **l'hérédité**, si elle est vraie au rang n , alors elle est vraie au rang $n + 1$. En appliquant cette hérédité à $n = 1$, on montre donc qu'elle est vraie pour $n = 2$, puis $n = 3$, etc... Finalement on a montré que pour tout nombre n entier, la somme des n premiers nombres impairs vaut n^2 . En clair : $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$. $\square$

Notre propriété est donc bien solide, on peut l'utiliser pour n'importe quelle valeur. Observez que la démonstration demande tout de même un certain travail (*je vous ai perdu pendant la phase d'hérédité ?*), mais qu'une démonstration est nécessaire pour utiliser un résultat plus tard. On l'explique une fois, pour ne plus l'avoir à l'expliquer plus tard lorsqu'on s'en sert.

Par exemple, vous utilisez les théorèmes de Thalès et de Pythagore sans les avoir démontrés, mais qui vous dit qu'ils sont vrais ? Qui vous dit qu'il n'y a pas une exception ? Et bien ce "*qui*", c'est la démonstration, mais qui pour ces deux théorèmes n'est pas de votre niveau (*si vous êtes en collège*). Et c'est bien pour cela qu'on ne les montre pas au collège mais que l'on admet ces résultats. Mais si ça vous intéresse, je vous invite à aller fouiller le net pour les diverses démonstrations disponibles.

*"Pour prendre une décision, il faut être un nombre impair
de personnes, et trois c'est déjà de trop"*
- Georges CLEMENCEAU