CHAPITRE 14 – FONCTIONS LINÉAIRES

I) Définition et lien avec la proportionnalité

Définition : Une fonction *f* est une *fonction linéaire* si elle s'écrit $f(x) = ax$ pour un certain nombre *a* non nul, appelé *coefficient* de la fonction linéaire *f*.

Exemples :

- $f(x) = 5x$ est linéaire et son coefficient est 5; on peut aussi l'écrire $f : x \to 5x$.
- $g(x) = -3x$ est linéaire et son coefficient est -3; on peut aussi l'écrire $g : x \to -3x$.
- $h(x) = 3x + 9$ n'est pas linéaire, à cause du "+9".
- $k(x) = 2x^2$ n'est pas linéaire, car le *x* est élevé au carré.

Remarque : Un tableau de valeurs d'une fonction linéaire *f* est nécessairement un tableau de proportionnalité. Le coefficient de proportionnalité du tableau est justement le coefficient de *f*.

Exemple : Le coefficient de proportionnalité de ce tableau est 1,4. On peut donc le modéliser par la fonction linéaire $f(x) = 1,4x$.

Nb tickets bus	2	5	10	15	20
Prix (€)	2,8	7	14	21	28

$\times 1,4$

II) Images et antécédents

Méthode : Pour calculer l'image d'un nombre par une fonction linéaire, on remplace, dans l'expression algébrique, la variable par le nombre en question, comme pour toute fonction. Pour trouver un antécédent, on résoud une équation. La solution s'obtient avec une seul division.

Propriété : Si le coefficient de la fonction est non nul, chaque nombre a un unique antécédent.

Exemples : • On considère la fonction linéaire $f : x \to -4x$,
Pour calculer l'image de 7 par la fonction *f* on remplace *x* par 7, ce qui donne $f(7)=-4\times 7=-28$.
Calculons l'unique antécédent de -36 par cette fonction linéaire. Il suffit de résoudre l'équation suivante : $f(x)=-36$ => $-4x=-36$ => $x=\frac{-36}{-4}$ => $x=9$. Donc l'antécédent de -36 par la fonction *f* est $x = 9$ (*et l'on voit bien que c'est le seul trouvé*)

• On considère la fonction linéaire $g : x \to 8x$.
Calculons l'image de -3 par g et l'antécédent de 49,6 par g. On a : $g(-3)=8\times(-3)=-24$ pour l'image et pour l'antécédent $g(x)=49,6$ => $8x=49,6$ => $x=\frac{49,6}{8}=6,2$

III) Représentations graphiques

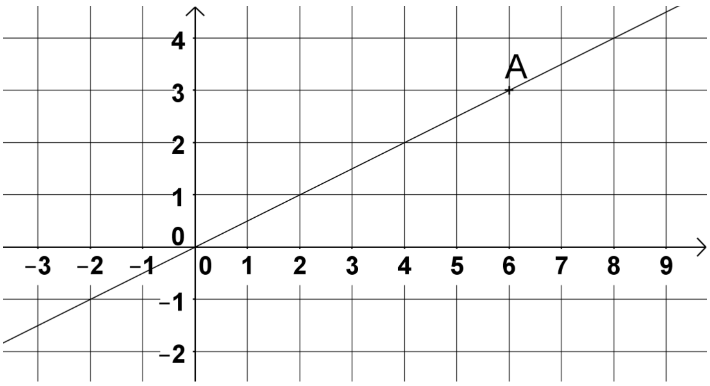
Propriété : Etant donné un repère et une fonction linéaire *f* :

- La représentation graphique de *f* dans ce repère est une droite *(d)* qui passe par l'origine ;
- Le coefficient de *f* est aussi appelé *coefficient directeur* de *(d)*;
- Pour tracer *(d)*, il suffit de trouver un point de *(d)* autre que l'origine.

Méthode :
Pour représenter graphiquement la fonction linéaire *f : x → 0,5x* on choisit le nombre non-nul que l'on veut et on calcule son image. Choisissons 6 ; Alors :

$$f(6)=0{,}5\times 6=3.$$

Il suffit donc de placer le point A(6 ; 3) dans le repère qui nous est donné, puis tracer la droite entre ce point et l'origine. Voici :



IV) Déterminer une fonction linéaire

Vocabulaire : Déterminer une fonction linéaire signifie déterminer son expression algébrique, cela revient à trouver son coefficient.

Méthode : Pour déterminer le coefficient d'une fonction linéaire *f*, il suffit de connaître un nombre non nul *x* ainsi que son image *f (x)* et de calculer le quotient $\frac{f(x)}{x}$.

Exemples : • Si *f* est une fonction linéaire et si l'on sait que $f(-2)=18$, alors le coefficient de *f* est $\frac{18}{-2}=-9$; donc l'expression algébrique de *f* est *f (x) = -9x*.

• Si *g* est une fonction linéaire et si l'on sait que $g(8)=6$, alors le coefficient de *g* est $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$; donc l'expression algébrique de *g* est $g(x)=\frac{3}{4}x$.

Exemple : ***Extrait du sujet de brevet Centres étrangers, Juin, 2023***

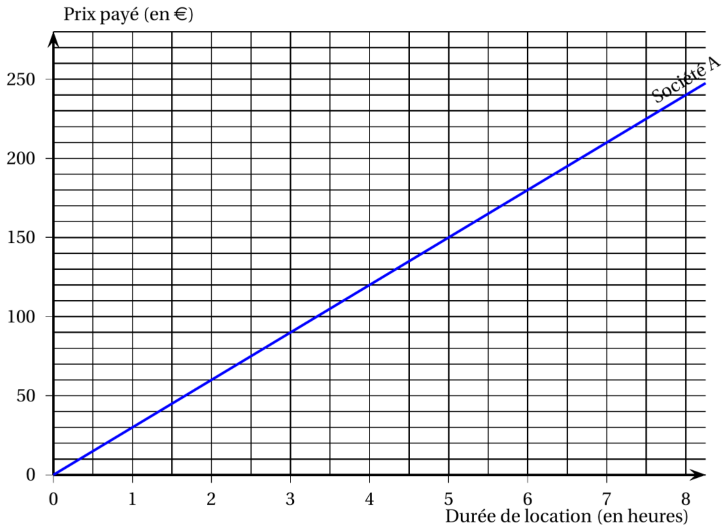
Pour une société, le prix à payer pour la location d'un bateau en fonction du nombre d'heures est donné par le graphique suivant.

1) Quel prix va-t-on payer pour louer 2h ?

2) On dispose d'un budget de 100€. Combien de temps peut on louer un bateau ?

3) Expliquer pourquoi le prix est proportionnel au nombre d'heures ?

4) En déduire par le calcul le prix à payer pour louer un bateau pendant 10h.



1) Par lecture graphique, on voit que l'on peut louer ce bateau pour 60€

2) Par lecture graphique toujours, on peut en déduire que l'on peut le louer pendant environ 3h20.

3) Le graphique de la situation est une droite passant par l'origine. C'est donc une situation de proportionnalité. Il existe donc une fonction linéaire traduisant la situation.

4) On a vu que pour 2h, ceci nous coute 60€, si bien que si p est le prix à payer en fonction du nombre de d'heures, on a p(2) = 60. Comme p est linéaire selon la question précédente, on en déduit que son coefficient est 60÷2 = 30. Donc *p(x) = 30x*. Finalement, pour 10h, *p(10) = 10×30 = 300*, soit 300€ pour 10h de location.

Remarque : *Les fonctions linéaires sont des cas particuliers des fonctions affines, donc peu de vidéos sur ce thème sont disponibles. On se focalisera sur ces dernières et leurs vidéos au Chap.16.*

EXERCICES – CHAPITRE 14

I) Définition et lien avec la proportionnalité, p.108

1 Complète le tableau ci-dessous, en indiquant les fonctions linéaires et leur coefficient.

Fonction linéaire					
Coefficient					

$f : x \longmapsto 6x - 1$

$g : x \longmapsto \frac{x}{5}$

$h : x \longmapsto \frac{5}{x}$

$j : x \longmapsto -3x^2$

$k : x \longmapsto -\frac{2}{7}x$

$l : x \longmapsto 5x - 3{,}2x$

$m : x \longmapsto -3(x - 2)$

$n : x \longmapsto 3(1 - x) - 3$

2 f est une fonction linéaire de coefficient – 5.

a. Complète le tableau de valeurs suivant.

x	– 3	– 0,5			5		10
$f(x)$			0,5	0		– 18	

b. Que peux-tu dire de ce tableau ? Justifie.

....

....

....

5 j est une fonction linéaire telle que $j(4) = 3$.

a. Est-il possible que $j(-8) = -5$? Justifie.

....

....

b. Sans déterminer le coefficient de j, calcule.

- $j(24) =$ ....
- $j(-2) =$ ....

c. Quel est le coefficient de j ?

....

6 k est une fonction linéaire telle que $k(7) = -2$.

a. Sans déterminer le coefficient de k, calcule.

- $k(21)$ ....
- $k(-3{,}5)$ ....

b. Quel est le coefficient de k ?

....

....

II) Images et antécédents, p.108

3 On considère la fonction $g : x \longmapsto 9x$.

a. Complète.

$g(5) =$ ....

$g(-5) =$ ....

b. Quelle est l'image de 7 ? ....

c. Quelle est l'image de – 3 ? ....

d. Quel est l'antécédent de 54 ?

....

e. Quel est l'antécédent de – 4,5 ?

....

4 On considère la fonction $h : x \longmapsto -2{,}4x$.

a. Complète.

$h(5)$ ....

$h(-5)$ ....

b. Quelle est l'image de 7 ? ....

c. Quelle est l'image de – 3 ? ....

d. Quel est l'antécédent de 24 ?

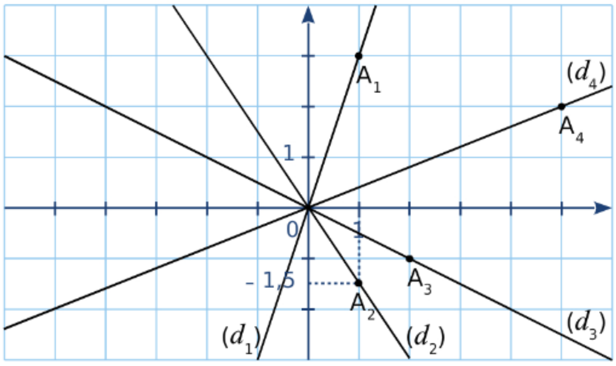
....

e. Quel est l'antécédent de – 0,6 ?

....

III) Représentations graphiques, p.110, 111

1 Les droites (d_1), (d_2), (d_3) et (d_4) sont les représentations graphiques respectives de quatre fonctions linéaires f_1, f_2, f_3 et f_4.



a. Quelles sont les coordonnées de A_1, A_2, A_3 et A_4 ?

....

....

b. Déduis-en le coefficient de f_1, f_2, f_3 et f_4.

Fonction	f_1	f_2	f_3	f_4
Coefficient				

c. Déduis-en l'expression de chaque fonction.

....

....

1 Soient les fonctions $f : x \longmapsto 4x$ et $g : x \longmapsto -4x$.

a. Quelle est la nature de leur représentation graphique ? Justifie.

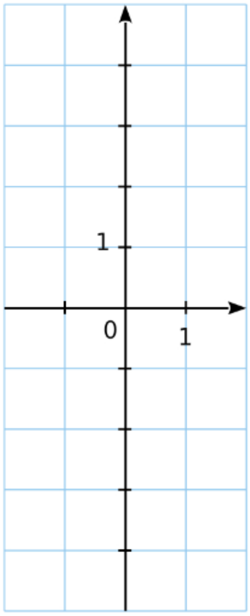
....

....

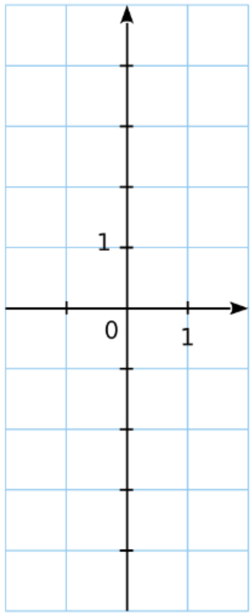
b. Calcule les coordonnées des points F et G d'abscisse 1 de la courbe de f puis de celle de g.

....

c. Trace la courbe de f.

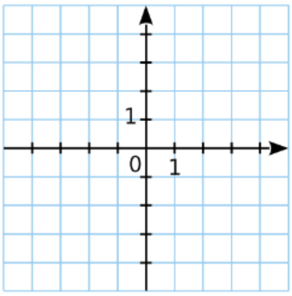


d. Trace la courbe de g.

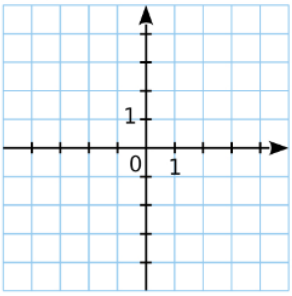


2 Trace la représentation graphique de chaque fonction dans le repère correspondant.

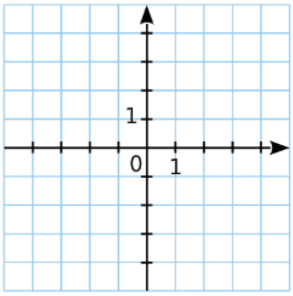
$f_1(x) = 2x$



$f_2(x) = -3x$



$f_3(x) = -1,5x$



$f_4(x) = \frac{1}{2}x$