

La Cellule de Fermat : solution des énigmes

Maxime KIENTZ

2 janvier 2021

Prérequis : Avoir vu le film

Niveau : Culture générale

Ce petit article recense les différentes solutions et les étapes de résolution des énigmes proposés par Fermat dans le film "La cellule de Fermat". Si vous avez vu le film depuis longtemps ou que vous n'êtes pas familier avec l'opus, voici un bref résumé qui devrait vous motiver à le (re)voir : *Après avoir résolu une énigme envoyée par un dénommé Fermat, quatre mathématiciens qui ne se connaissent pas sont invités à un mystérieux colloque. Cette réunion s'avère être en réalité un piège et les scientifiques se retrouvent prisonniers, forcés de résoudre une succession d'énigmes logiques et de découvrir les liens qui les unissent, sans quoi les murs de la pièce dans laquelle ils sont enfermés se rapprocheront de plus en plus, jusqu'à les écraser.*

C'est justement de ces différentes énigmes dont nous allons parler. Elles sont au nombre de 8 et sont très diverses. Voici la liste des énigmes et leur analyse.

1 Le berger et ses animaux

Un berger possède une barque et doit traverser une rivière avec une chèvre, un chou et un loup. La barque ne peut contenir que le berger et une chose supplémentaire. La chèvre ne peut rester sans surveillance avec le chou (car elle le mange) ou avec le loup (car il la mange). Comment doit procéder le berger pour effectuer la traversée ?

En lisant l'énoncé on déduit rapidement que les deux seules entités qui peuvent cohabiter sont le chou et le loup. Ceci signifie que l'on doit amener les deux en priorité de l'autre côté de la rive, pour terminer en ramenant la chèvre. Cependant, le "en priorité" ne signifie pas forcément qu'il faut les amener en premier, littéralement. Le point épineux de ce problème de passage de rivière est qu'il faut oser aller dans le sens contraire du but demandé.

Une solution :

- Situation de départ
- On fait passer la chèvre de la rive 1 à la rive 2 (et non le chou ou le loup !), puis on retourne sur la rive 1.
- On fait passer le loup de la rive 1 à la rive 2.
- Mais on revient avec la chèvre sur la rive 1 ! Alors qu'elle était pourtant arrivée à destination...
- Il suffit alors de faire passer le chou de la rive 1 à la rive 2.
- Puis d'aller chercher la chèvre.

Un schéma des 6 étapes :

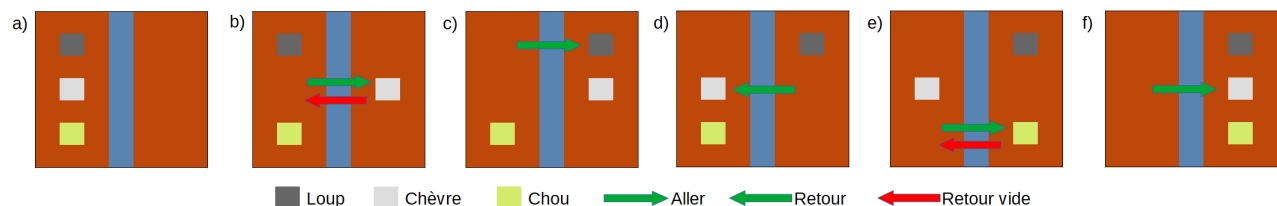


FIGURE 1 – Schéma explicatif de la solution de l'énigme du berger

2 Les caisses de caramels

Une personnes réceptionne trois caisses étiquetées dont l'une contient des caramels à la menthe, une autre des caramels à l'anis, et la troisième un mélange de caramels à la menthe et de caramels à l'anis. On prévient cette personne que toutes les caisses sont mal étiquetées. Combien de caramels faudra-t-il prendre dans les caisses pour être à même de réétiqueter convenablement les caisses ?

Étonnamment, la réponse est **un seul bonbon**. On retire ce bonbon de la caisse sur laquelle est écrite "*menthe*". Par supposition, cette étiquette est fausse, donc la caisse ne contient soit que des caramels à la menthe, soit que des caramels à l'anis. On pioche le bonbon de cette caisse. Si c'est un bonbon à l'anis, alors la bonne étiquette est "*anis*", sinon c'est "*menthe*".

Ensuite, il me reste deux boîte à étiqueter correctement. Supposons que l'on a tiré un caramel à l'anis à l'étape précédente, et que donc les étiquettes et caisses restantes sont celles à la menthe et le mélange. Alors la caisse sur laquelle est écrite "*menthe*" est fausse vu que les étiquettes sont supposées fausses au départ. C'est donc la caisse contenant le mélange, et la dernière caisse restante est donc celle contenant le mélange.

Voci un schéma explicatif :

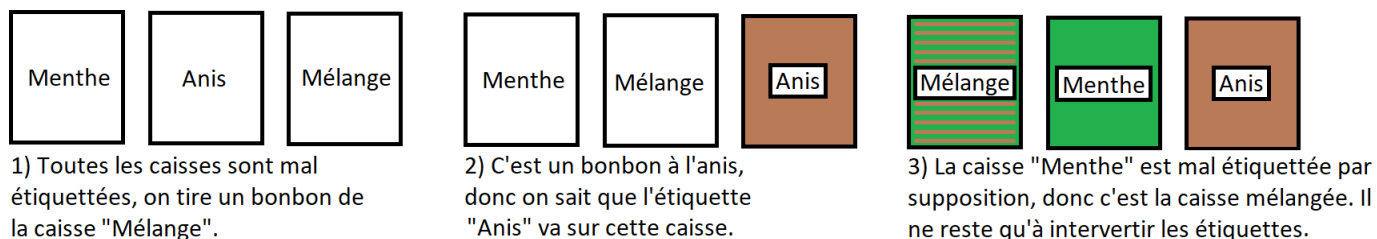


FIGURE 2 – Schéma explicatif de la solution de l'énigme des caramels

3 La séquence de nombres

000000000000000011111111000111111111001111111110011000100011001100010001100111110
111110011110001111000111111100000101010100000011010110000001111110000000000000000

C'est la seule information pour cette énigme, rien d'autre. Plutôt déroutante au premier abord, la bonne idée de Galois dans le film est d'observer le nombre de 0 et de 1 dans la séquence. il y en a 169 en tout, et 169 n'est pas n'importe quel nombre, c'est 13^2 . Comme $169 = 13^2$ on peut donc créer un carré de 13 par 13 et remplir les cases ligne après ligne selon les valeurs données. On doit donc découper la séquence en 13 lignes de 13 nombres. On obtient les séquences suivantes :

```

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0
0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 1 1 0
0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 1 1 0
0 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 0
0 1 1 1 1 0 0 0 1 1 1 1 0
0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0
0 0 0 1 0 1 0 1 0 1 0 0 0
0 0 0 1 1 0 1 0 1 1 0 0 0
0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

```

Vous le voyez ? En envoyant cette énigme, Fermat donne son intention vis à vis du groupe s'il n'obtient pas ce qu'il veut. La représentation est encore plus claire en coloriant les 0 en noir et les 1 en blanc :

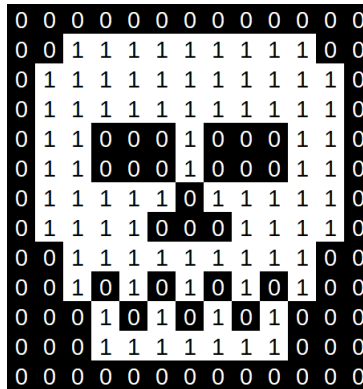


FIGURE 3 – Et c'est ainsi que Fermat donne ses intentions au groupe...

4 Interrupteurs dans le noir

Une pièce est fermée hermétiquement et contient une lampe commandée par l'un des trois interrupteurs se trouvant à l'extérieur de celle-ci. Comment faut-il procéder pour déterminer avec certitude quel interrupteur commande la lampe en n'ouvrant et n'entrant qu'une seule fois dans la pièce ?

Pour résoudre cette énigme, il faut se rappeler d'une chose : une ampoule chauffe lorsqu'elle est allumée ! Cette information cruciale va nous aider à résoudre cette énigme car c'est un élément déterminant dans la solution. On va commencer par allumer l'interrupteur n°1 et attendre cinq minutes environ. On l'éteint, puis on allume l'interrupteur n°2. C'est à ce moment que l'on entre dans la pièce, car l'un des trois scénarii suivants se produit alors et nous permet de répondre :

En entrant dans la pièce :

- Si la lampe est *allumée*, alors on sait que c'est l'interrupteur n°2 qui l'actionne car il est en position allumé.
- Si la lampe est *éteinte et chaude*, alors on sait que c'est l'interrupteur n°1 que l'on a actionné il y a cinq minutes.
- Si la lampe est *éteinte et froide*, alors on sait que c'est l'interrupteur n°3 car il n'aura pas permis à l'ampoule de chauffer pendant les cinq minutes d'attentes.

5 Les sables du temps

Comment mesurer 9 minutes avec un sablier mesurant 4 minutes et un sablier mesurant 7 minutes ?

Il faut évidemment jongler avec les sabliers et leurs durées pour créer des durées qui ne peuvent être mesurées par un seul sablier. La solution peut être obtenue de la façon suivante :

Une solution :

- a) Retourner les 2 sabliers en même temps.
- b) Une fois que celui de 4 minutes est vide, on le retourne (le sablier de 7 minutes en a encore pour 3 minutes).
- c) Une fois celui-ci écoulé, on le retourne (on en est donc à 7 minutes (4+3), et le sablier de 4 minutes ne va plus que s'écouler 1 minute)
- d) Et pour finir, une fois que le sablier de 4 minutes est vide (il ne restait plus que 1 minute pour le vider), on retourne celui de 7 minutes (il ne reste donc plus que 7 - 6 = 1 minute).
- e) Ainsi, on obtient : 4 + 3 + 1 + 1 = 9 minutes.

6 Les filles du professeur

Un élève demande à un professeur quel est l'âge de ses trois filles ? Le professeur répond que le produit de leurs âges vaut 36 et que la somme de leurs âges est égal au numéro de la maison de l'élève. Ce dernier dit qu'il n'a pas assez d'informations pour déterminer l'âge des filles du professeur. L'enseignant ajoute alors que son aînée joue du piano. Quels âges ont les filles du professeur ?

Bien que ce ne soit pas explicitement donné dans l'énigme, les âges sont entiers. Commençons par établir la liste des diviseurs de 36 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36. Comme le produit des âges vaut 36, c'est la liste de tous les âges possibles des filles. Observons les produits possibles pour obtenir 36 avec trois nombres. On en recense huit :

$36 - 1 - 1(\text{Somme} = 38)$	$18 - 2 - 1(\text{Somme} = 21)$	$12 - 3 - 1(\text{Somme} = 16)$	$9 - 4 - 1(\text{Somme} = 14)$
$9 - 2 - 2(\text{Somme} = 13)$	$6 - 6 - 1(\text{Somme} = 13)$	$6 - 3 - 2(\text{Somme} = 11)$	$4 - 3 - 3(\text{Somme} = 10)$

Si l'on interprète la phrase "*Ce dernier dit qu'il n'a pas assez d'informations pour déterminer l'âge des filles du professeur*", ceci signifie qu'il n'est pas certain de la solution, alors qu'il connaît forcément le numéro de sa maison. De ce fait, le seul doute possible peut survenir s'il habite au numéro 13, le seul apparaissant en double dans les sommes.

La dernière information se trouve alors dans la phrase "*son aînée joue du piano*". Ce n'est pas le piano qui est important, mais le fait qu'il n'ait **qu'une** aînée ! Ainsi le triplet 6 - 6 - 1 est impossible car il y a deux aînées de 6 ans. Les filles du professeur ont donc 9 ans pour l'aînée, et 2 ans pour les deux cadettes.

7 Vérité et mensonge

Tous les habitants de la terre du Faux mentent toujours, alors que ceux de la terre du Vrai disent toujours la vérité. Un voyageur se retrouve face à deux portes. L'une menant vers la liberté et l'autre non. Il y a deux habitants (l'un de la terre du Vrai, l'autre de la terre du Faux) se trouvant devant une porte chacun. Le voyageur ne peut poser qu'une question, à l'un des deux, et doit en déduire quelle est la porte qui ouvre vers la liberté. Ne sachant pas quel est l'habitant de la terre du Vrai et celui de la terre du Faux ; quelle question doit-il poser ?

Il existe plusieurs questions que l'on peut poser à l'un de ces deux habitants pour déterminer la porte vers la liberté. Celle utilisée pour le film est "*Quelle porte indiquerait l'autre habitant comme étant celle menant vers la liberté ?*". En effet :

- Si la question est posée à l'habitant du Vrai, alors cet habitant montrerait la porte derrière l'autre garde, qui montrerait la sienne car il ment.
- Si la question est posée à l'habitant du Faux, alors comme il ment, il montrerait sa propre porte. En effet l'habitant du Vrai montrerait sa porte, mais comme on a posé la question au menteur, il doit nécessairement montrer sa propre porte pour mentir.

Quoi qu'il en soit, la porte ne menant pas vers la liberté sera toujours désignée avec cette question, et le voyageur doit donc emprunter l'autre porte.

Une autre question que l'on aurait pu poser est "*Est-ce que celui qui dit la vérité se trouve devant la porte vers la liberté ?*". Si la réponse est oui, on passe la porte derrière le garde à qui on vient de la poser. Si la réponse est non, on emprunte l'autre porte. Je vous laisse énumérer les différents cas de figure pour vérifier que cette question fonctionne également.

8 Donner la vie

Une mère a 21 ans de plus que son fils. Dans 6 ans, le fils sera 5 fois plus jeune que sa mère. Que fait le père ?

Cette dernière énigme est traitée très rapidement car elle est donnée en fin de film, alors que les protagonistes sont proches de leur issue. C'est aussi à mon sens la plus simple ! Il suffit de la mettre en équation en posant x l'âge du fils et y l'âge de la mère. En décortiquant les phrases de l'énoncé, on obtient :

$$\begin{aligned} &\text{Une mère a 21 ans de plus que son fils : } y = 21 + x. \\ &\text{Dans 6 ans, le fils sera 5 fois plus jeune que sa mère : } y + 6 = 5(x + 6). \end{aligned}$$

On en déduit alors déjà que $6 + 21 + x = 5(x + 6)$ donc $27 + x = 5x + 30$ par substitution de la première égalité dans la seconde. Ceci nous donne $x - 5x = 30 - 27$ donc $-4x = 3$. Après résolution on en déduit que $x = \frac{-3}{4}$. Or les $\frac{-3}{4}$ d'une année, c'est -9 mois. Le fils a donc -9 mois d'âge, ceci signifie que le père est simplement en train de concevoir son fils.

"J'ai découvert une preuve merveilleuse de ce théorème, mais cette marge est trop petite pour la contenir" - Pierre de FERMAT, dans une note mentionnant l'un de ses fameux théorèmes¹, dont la démonstration fut établie plus de 300 ans plus tard et dont la taille dépasse les 100 pages...

1. Plus d'informations ici <https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/detentes/la-conjecture-de-fermat>