CHAPITRE 7 – ARITHMÉTIQUE

I) Décomposition en produit de facteurs premiers

Le résultat qui suit est un important résultat en mathématiques. Il s'énonce de la façon suivante :

Propriété : Tout nombre entier positif s'écrit d'une unique façon sous la forme d'un produit de facteurs premiers. Cette écriture se nomme la *décomposition en facteurs premiers* du nombre.

Exemples : • $78 = 2 \times 3 \times 13$ • $50 = 2 \times 5 \times 5 = 2 \times 5^2$ • $120 = 2^3 \times 3 \times 5$

Bien que la décomposition d'un nombre existe à coup sûr, il faut encore savoir la déterminer. Pour réaliser ceci, on va diviser successivement le nombre en question par des nombres premiers, jusqu'à aboutir à 1. La liste des diviseurs successifs sera la décomposition du nombre de départ.

Exemple : On décompose le nombre 4680 en produit de facteurs premiers. La méthode la plus efficace consiste à chercher les diviseurs premiers de 4680 dans l'ordre croissant :

- 4680 est divisible par 2 $4680 = 2 \times 2340$
- 2340 est divisible par 2 $4680 = 2 \times 2 \times 1170$
- 1170 est divisible par 2 $4680 = 2 \times 2 \times 2 \times 585$
- 585 est divisible par 3 $4680 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 195$
- 195 est divisible par 3 $4680 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 65$
- 65 est divisible par 5 $4680 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 13$
- 13 est divisible par 13 , qui donne 1, donc $4680 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 13$

$$\begin{array}{r|l} 4680 & 2 \\ 2340 & 2 \\ 1170 & 2 \\ 585 & 3 \\ 195 & 3 \\ 65 & 5 \\ 13 & 13 \\ 1 & \end{array}$$

Remarque : On écrit souvent la décomposition de la façon ci-contre, en colonne.

Exemples : Décomposer 165 et 5100 en produit de facteurs premiers. Voici leur décomposition en colonne :

$$\begin{array}{r|l} 165 & 5 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5100 & 2 \\ 2250 & 2 \\ 1275 & 3 \\ 425 & 5 \\ 85 & 5 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

On a donc les décompositions suivantes :

- $165 = 3 \times 5 \times 11$
- $5100 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 17$

Remarque : L'ordre croissant des diviseurs est le plus méthodique mais n'est pas obligatoire. Dans le premier exemple on a divisé par 5 avant de diviser par 3.

Vidéos : Décomposer un nombre en produit de facteurs premiers
https://www.youtube.com/watch?v=RBE2wPIKagI&list=PLVUDmbpupCarJc2-DNyRa54TsNpEEQGZT&index=3
EXERCICE : Décomposer un nombre en produits de facteurs premiers.
https://www.youtube.com/watch?v=nyfiNpLBh8w&list=PLVUDmbpupCarJc2-DNyRa54TsNpEEQGZT&index=4

II) Applications

1) A la simplification de fractions

On a vu dans le chapitres précédent que deux fractions différentes peuvent être égales. Si tel est le cas, ceci signifie que le numérateur et le dénominateur de la première fraction peuvent être multiplié/divisé par un nombre pour obtenir la seconde fraction.

Par exemple :

$$\frac{24}{16}=\frac{3}{2} \text{ car } \frac{24}{16}=\frac{3\times 8}{2\times 8}=\frac{3}{2} \quad (\textit{rappel : on dit qu'on a simplifié } \frac{24}{16} \textit{ par } 8)$$

La décomposition en facteurs premiers permet de simplifier efficacement un fraction à la main.

Méthode : Rendre une fraction irréductible.

- On décompose le numérateur et le dénominateur en produit de facteurs premiers;
- On simplifie la fraction en supprimant les facteurs qui apparaissent à la fois au numérateur et au dénominateur (on en supprime autant au numérateur qu'au dénominateur).

Exemple : Pour décomposer $\frac{780}{1530}$ on effectue d'abord la décomposition de chacun des nombres :

$780 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 13$ et $1530 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 17$

Une fois ces décompositions effectuées, on replace les résultats dans la fraction et on simplifie successivement jusqu'à obtenir la forme irréductible. Ainsi :

$$\frac{780}{1530}=\frac{2^2\times 3\times 5\times 13}{2\times 3^2\times 5\times 17}=\frac{2\times 2\times 3\times 5\times 13}{2\times 3\times 3\times 5\times 17}=\frac{2\times 13}{3\times 17}=\frac{26}{51}$$

Vidéos : Rendre une fraction irréductible
https://www.youtube.com/watch?v=qZaTliAWkA0&list=PLVUDmbpupCarJc2-DNyRa54TsNpEEQGZT&index=11
EXERCICE : Rendre une fraction irréductible
https://www.youtube.com/watch?v=pRO4I__miTY&list=PLVUDmbpupCarJc2-DNyRa54TsNpEEQGZT&index=12

2) A des problèmes de répartition

Lorsque l'on effectue la décomposition en facteurs premiers de plusieurs nombres en même temps, on peut observer des termes en commun dans les décompositions. On a la propriété suivante :

Propriété : Si l'on effectue la décomposition en facteurs premiers de deux nombres simultanément, alors tout facteur commun ou produit de facteurs communs aux deux décompositions est un diviseur commun aux deux nombres.

60	**2**	**84**	**2**
30	**2**	**42**	**2**
15	**3**	**21**	**3**
5	**5**	**7**	**7**
1		**1**	

Exemple : Etablir la liste des diviseurs communs de 60 et 84. On commence par effectuer les décompositions : $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ et $84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7$

On peut alors déduire que les diviseurs communs à 60 et 84 sont :

2 ; 3 ; $2 \times 2 = 4$; $2 \times 3 = 2 \times 3 = 6$; $2 \times 2 \times 3 = 12$ soit {2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12}

Souvent, le plus important de ces nombres est le plus grand d'entre eux, appelé plus grand diviseur commun (*et parfois abrégé PGCD*). Ainsi, dans l'exercice précédent, 12 est le plus grand diviseur commun de 60 et 84 et on écrit parfois $PGCD(60;84) = 12$. Ce nombre est souvent très important dans des exercices de répartition.

Exemple : Un marchand de fruits possède 60 pommes et 84 poires. Il veut les répartir équitablement dans des paniers pour les vendre. On a vu avant que le plus grand diviseur commun de 60 et 84 est 12, il pourra donc faire 12 paniers. De plus, en effectuant la division, on peut savoir que chaque panier contiendra $60 \div 12 = 5$ et $84 \div 12 = 7$ poires.

Remarque : Ces réponse ne sont pas anodines, elles correspondent aux facteurs "*restants*" dans les décompositions après avoir retiré les facteurs communs aux deux nombres.

Vidéos :	Déterminer les diviseurs d'un nombre

https://www.youtube.com/watch?v=sSgsrHMyFrI&list=PLVUDmbpupCarJc2-DNyRa54TsNpEEQGZT&index=3
Résoudre un problème de divisibilité - diviseurs
https://www.youtube.com/watch?v=QoRWa45dQig&list=PLVUDmbpupCarJc2-DNyRa54TsNpEEQGZT&index=5
Résoudre un problème de divisibilité – multiples
https://www.youtube.com/watch?v=w-owLAC2Kv4&list=PLVUDmbpupCarJc2-DNyRa54TsNpEEQGZT&index=9
QCM – Arithmétique
https://www.youtube.com/watch?v=L_hVwt3qQpk&list=PLVUDmbpupCarJc2-DNyRa54TsNpEEQGZT&index=13
Prépare ton brevet – Arithmétique
https://www.youtube.com/watch?v=1cqNDPUNBk4&list=PLVUDmbpupCarJc2-DNyRa54TsNpEEQGZT&index=7
Le cours – Arithmétique
https://www.youtube.com/watch?v=al9oHwrlTNo&list=PLVUDmbpupCarJc2-DNyRa54TsNpEEQGZT

Exemple : ***Extrait du sujet de brevet Métropole, la Réunion, 2019***

Le capitaine d'un navire possède un trésor constitué de 69 diamants, 1 150 perles et 4 140 pièces d'or.

1. Décomposer 69 ; 1 150 et 4 140 en produits de facteurs premiers.
2. Le capitaine partage équitablement le trésor entre les marins.
   Combien y-a-t-il de marins sachant que toutes les pièces, perles et diamants ont été distribués ?

1) Après avoir effectué les algorithmes de décompositions, on a les décompositions suivantes :

$69 = 3 \times 23$

$1150 = 2 \times 5^2 \times 23$

$4140 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 23$

69	3
23	23
1	

1150	2
575	5
115	5
23	23
1	

4140	2
2070	2
1035	3
345	3
115	5
23	23
1	

2) On remarque que parmi les termes de chacune des décompositions, seul le 23 est en commun. Il s'agit donc du plus grand diviseur commun de ces trois nombres et correspond donc au nombre de marins.

Bonus : Lorsque l'on multiplie ensemble les facteurs restants, (ou l'on divise chacun des nombres par 23, cela revient au même), on peut aussi obtenir le butin de chaque marin. Ainsi, chaque marin possède 3 diamants, $2 \times 5^2 = 50$ perles et $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$ pièces d'or.

EXERCICES – CHAPITRE 7

I) Décomposition en produits de facteurs premiers, p.9

6 Relie chaque nombre à sa décomposition en facteurs premiers.

$2 \times 3^2 \times 7$ •	• 45
$2^2 \times 3^2 \times 5$ •	• 98
$2 \times 5^2 \times 7$ •	• 126
$3^2 \times 5$ •	• 180
$2^3 \times 3^3$ •	• 216
2×7^2 •	• 350

2 À l'aide de la calculatrice, décompose chaque nombre en produit de facteurs premiers.

a. 172 = ...

b. 340 = ...

c. 1 247 = ...

d. 1 249 = ...

e. 1 251 = ...

f. 69 300 = ...

II) Applications

1) Simplification de fraction, p.11

1 Ces fractions sont-elles irréductibles ? Justifie.

a. $\frac{4}{6}$ **b.** $\frac{3}{19}$ **c.** $\frac{15}{30}$ **d.** $\frac{1}{82}$ **e.** $\frac{42}{39}$

a. ....

....

b. ....

....

c. ....

....

d. ....

....

e. ....

....

3 Écris chaque fraction sous la forme d'une fraction irréductible.

a. $\frac{4 \times 15 \times 14}{21 \times 10 \times 22} =$ ....

b. $\frac{2^2 \times 3 \times 5^3}{2 \times 3^3 \times 5^2} =$ ....

c. $\frac{3^3 \times 5 \times 7^2}{3^2 \times 7 \times 13} =$ ....

d. $\frac{2^2 \times 5^4 \times 17}{2^5 \times 5^3 \times 11} =$ ....

e. $\frac{2^3 \times 3^2 \times 11^2}{2^5 \times 3^3 \times 5} =$ ....

a. $\frac{385}{165} =$ ....

b. $\frac{153}{189} =$ ....

2 Rends chaque fraction irréductible.

c. $\frac{120}{90} =$ ....

d. $\frac{184}{316} =$ ....

2) Résolution de problèmes, p.13

1 Jérémy souhaite faire des paquets de billes, en répartissant intégralement ses 90 billes rouges et 150 billes noires. Le contenu de chaque paquet doit être identique.

a. Décompose 90 en produit de facteurs premiers.

....

b. De même pour 150.

....

c. Détermine le plus grand diviseur commun à ces deux nombres.

....

....

d. Calcule le nombre de paquets maximal qu'il pourra réaliser et donne leur composition.

....

....

....

2 Pour le 1er mai, Julie dispose de 182 brins de muguet et de 78 roses. Elle veut faire le plus grand nombre de bouquets identiques en utilisant toutes les fleurs.

a. Combien de bouquets identiques pourra-t-elle faire ?

....

....

....

....

....

....

b. Quelle sera la composition de chaque bouquet ?

....

....

4 Aurélien possède un terrain rectangulaire de dimensions 78 sur 102 mètres qu'il souhaite clôturer. Afin de poser un grillage, il doit planter des poteaux régulièrement espacés et, pour simplifier le travail, il veut que la distance entre chaque poteau soit un nombre entier de mètres. De plus, il lui faut un poteau à chaque coin.

a. Deux poteaux peuvent-ils être espacés de cinq mètres ? De trois mètres ?

....

....

....

b. Aurélien veut planter le moins de poteaux possible. Que peux-tu dire alors de la distance entre deux poteaux ?

....

....

....

....

....

....

c. Combien doit-il alors planter de poteaux ?

....

3 Olivia avait un paquet de 320 bonbons et un paquet de 280 chewing-gums qu'elle a partagés équitablement avec un groupe de personnes.
Il lui reste alors 5 bonbons et 10 chewing-gums.

a. On souhaite retrouver le nombre de personnes de ce groupe. Le nombre recherché est un diviseur de deux nombres, lesquels ?

....

....

b. Calcule maintenant le nombre maximal de personnes du groupe.

....

....

....

....

....

....

c. Combien de bonbons et de chewing-gums chaque personne aura-t-elle ?

....

....