CHAPITRE 2 – PUISSANCES : COMPLÉMENTS

I) Rappels

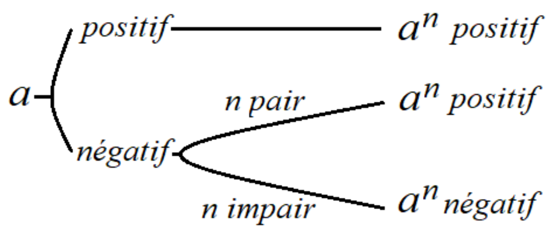
1) Généralités

Définition : Soit a un nombre relatif et n un entier positif. On note $a^n = a \times a \times \ldots \times a$ (n *fois*)
Le nombre a^n *se lit « a exposant n » ou « a puissance n ».*

Remarque : $a^0 = 1$ par convention ; $a^1 = a$; $a^2 = a \times a$; $a^3 = a \times a \times a$
« *au carré* » correspond à la puissance 2, et « *au cube* » correspond à la puissance 3 d'un nombre.

Exemples : $3^2 = 3 \times 3 = 9$ — *« 3 au carré » ou « 3 puissance 2 »*
$(-4)^3 = -4 \times (-4) \times (-4) = -64$ — *« -4 au cube » ou « -4 exposant 3 »*
$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ — *« 2 puissance 5 »*

A l'instar de la règle des signes, une petite propriété permet de déterminer le signe d'une puissance selon la valeur de a et de n. Elle s'énonce comme suit :



Propriété : • Si a est positif, alors a^n est positif pour toute valeur de n.
• Si a est négatif, alors a^n est positif lorsque n est pair et est négatif lorsque n est impair.

Exemples : Pour le second cas, on a vu que $(-4)^3 = -4\times(-4)\times(-4) = -64$, mais $(-4)^2 = -4\times(-4) = 16$.

On rappelle aussi que si a est non nul, l'inverse de a^n est $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Donc $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

Vidéo :	Utiliser la notation de puissances
https://www.youtube.com/watch?v=jts9wiXPHtk&list=PLVUDmbpupCaqrE9JmRR9Law8aG-8yyJt-&index=2	
	Calculer des puissances avec des nombres relatifs
https://www.youtube.com/watch?v=4CEYTrvUP0I&list=PLVUDmbpupCaqrE9JmRR9Law8aG-8yyJt-&index=3	
	Résoudre un problème à l'aide de puissances (1)
https://www.youtube.com/watch?v=4kwH1rM992Q&list=PLVUDmbpupCaqrE9JmRR9Law8aG-8yyJt-&index=4	

2) Ecriture scientifique

Propriété : Pour tout n entier positif, 10^n s'écrit $1\underbrace{0\ldots0}_{n\ \text{zéros}}$; 10^{-n} s'écrit $\underbrace{0{,}0\ldots0}_{n\ \text{zéros}}1$

Exemples : $10^0 = 1$; $10^3 = 1000$; $10^7 = 10000000$; $10^{-2} = 0{,}01$; $10^{-4} = 0{,}0001$

Propriété : Tout nombre décimal non nul peut être écrit sous la forme $a \times 10^n$, où a est un nombre décimal ayant *un seul chiffre non nul pour partie entière* et où n est un nombre entier relatif.

Définition : L'écriture d'un nombre sous sa forme $a \times 10^n$ est appelée *l'écriture scientifique* du nombre. Le nombre a est appelé *mantisse* du nombre et n est son *ordre de grandeur*.

Exemples :

- $1254 = 1{,}254\times1000 = 1{,}254\times10^3$ 1,254 est la mantisse, et l'ordre de grandeur est 3.
- $476{,}23 = 4{,}7623\times100 = 4{,}7623\times10^2$ 4,7623 est la mantisse, et l'ordre de grandeur est 2
- $0{,}0000093 = 9{,}3\times0{,}000001 = 9{,}3\times10^{-6}$ 9,3 est la mantisse, et l'ordre de grandeur est -6

Avec cette notion d'ordre de grandeur s'accompagne une liste de préfixes permettant de désigner certains ordres de grandeurs, ainsi que leur abréviation. Voici le tableau :

Nano…	*Micro...*	*Milli...*	---	*Kilo…*	*Méga…*	*Giga...*
10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	1	10^3	10^6	10^9
n	*µ*	*m*	---	*k*	*M*	*G*

Exemples :

- 1254g correspond à $1{,}254\times10^3$ grammes, donc à 1,254 kilogrammes (abrégé *kg*).
- 0,0000013m correspond à $1{,}3\times10^{-6}$ mètres, donc à 1,3 micromètres (abrégé *µm*).
- La taille du Soleil est estimée à 1390000km, soit 1390000000m. Ceci correspond à $1{,}39\times10^9$m, donc à 1,39 Gigamètres (*abrégé Gm*).
-

Méthode : Appliqué au premier exemple précédent, voici comment retrouver l'écriture scientifique

- On déduit de ce nombre le *décimal* qui servira de mantisse : $1254 \longrightarrow 1{,}254$
- On *trouve la multiplication* qui permet de rejoindre le nombre de départ à partir de cette mantisse : $1254 = 1{,}254\times 1000$
- On *convertit 1000* en puissance de 10 : $1254 = 1{,}254\times 10^3$

Vidéos : Ecrire un nombre avec des puissances de 10
https://www.youtube.com/watch?v=D5Fe9Fv6CqQ&list=PLVUDmbpupCaqrE9JmRR9Law8aG-8yyJt-&index=5
Utiliser les puissances de 10 d'exposant négatif
https://www.youtube.com/watch?v=TSeL-rVZNPQ&list=PLVUDmbpupCaqrE9JmRR9Law8aG-8yyJt-&index=6
Ecrire sous forme décimale un nombre avec des puissances de 10
https://www.youtube.com/watch?v=vRPOgw3Sfnk&list=PLVUDmbpupCaqrE9JmRR9Law8aG-8yyJt-&index=7
Ecrire un nombre sous forme scientifique
https://www.youtube.com/watch?v=tzhNCpLRtCY&list=PLVUDmbpupCaqrE9JmRR9Law8aG-8yyJt-&index=8
Résoudre un problème à l'aide de puissances (2)
https://www.youtube.com/watch?v=RtstlSW1Jg0&list=PLVUDmbpupCaqrE9JmRR9Law8aG-8yyJt-&index=9
EXERCICE : Ecrire un nombre sous forme scientifique (1)
https://www.youtube.com/watch?v=W9ZjP-7jk50&list=PLVUDmbpupCaqrE9JmRR9Law8aG-8yyJt-&index=10
EXERCICE : Ecrire un nombre sous forme scientifique (2)
https://www.youtube.com/watch?v=0oOK8wCyXyc&list=PLVUDmbpupCaqrE9JmRR9Law8aG-8yyJt-&index=11
Calculer des puissances – notations scientifique – Tutoriel Casio
https://www.youtube.com/watch?v=xMR4hFMdTMY&list=PLVUDmbpupCaqrE9JmRR9Law8aG-8yyJt-&index=13
Calculer des puissances – notations scientifique – Tutoriel T.I.
https://www.youtube.com/watch?v=7eKVelM9lF8&list=PLVUDmbpupCaqrE9JmRR9Law8aG-8yyJt-&index=15

II) Compléments sur les puissances

Il existe certaines formules pour les puissances permettant de manipuler un calcul dans lequel plusieurs puissances figurent. On a les propriétés suivantes :

Propriété : Soient *a* et *b* deux nombres relatifs, où *b* est non nul, et *m* et *n* deux entiers. Alors

- $a^{m+n} = a^m \times a^n$
- $(a^m)^n = a^{m\times n}$
- $(a\times b)^m = a^m \times b^m$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

Exemples :

- $5^{-2} \times 5^4 = 5^{-2+4} = 5^2 = 25$
- $\frac{6^5}{6^3} = 6^{5-3} = 6^2 = 36$
- $(4^2)^3 = 4^{2\times3} = 4^6 = 4096$
- $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$
- $(2\times x)^3 = 2^3 \times x^3 = 8 \times x^3 = 8x^3$

Méthode : Pour réaliser un calcul dans lequel se trouvent des puissances, des multiplications et des divisions, on regroupe les nombres écrits sous la forme de puissances de 10 d'un côté et les mantisses de l'autre, et on calcule avec les règles habituelles.

Exemple : $\frac{14\times10^{-3}\times5\times10^6}{2\times10^4} = \frac{14\times5\times10^{-3}\times10^6}{2\times10^4} = \frac{70\times10^3}{2\times10^4} = \frac{70}{2}\times\frac{10^3}{10^4} = 35\times10^{-1} = 3{,}5$

Dans le cas où un calcul comporterait plusieurs des opérations de bases, ainsi que des puissances ou des racines, alors les règles de priorités sont, toujours de gauche à droite :

Parenthèses – Puissances et racines – Multiplications et divisions – Additions et soustractions

Exemple :

$$\begin{aligned} 3\times(4+3^2\times2-10\div\sqrt{25}) &= 3\times(4+9\times2-10\div5) \\ &= 3\times(4+18-2) \\ &= 3\times20 \\ &= 60 \end{aligned}$$

Exemple : ***Type D.N.B, extrait de plusieurs Q.C.M. (sources renseignées)***

	Questions	**A**	**B**	**C**	***Provenance***
1)	$\frac{5^7\times5^3}{5^2} = \ldots$	5^{13}	5^5	5^8	*Métropole 2022*
2)	$\frac{1}{(-2)\times(-2)\times(-2)} = \ldots$	$(-2)^{-3}$	$(-2)^3$	2^{-3}	*Métropole 2021*
3)	2×2^{400} est égal à …	2^{401}	4^{400}	2^{800}	*Asie 2021*
4)	L'écriture scientifique de 245×10^{-5} est :	$2{,}45\times5$	$2{,}45\times10^{-3}$	$2{,}45\times10^{-7}$	*Nouv.-Calédonie 2021*
5)	Le nombre $(-2)^4$ vaut	16	-8	20000	*Polynésie 2019*
6)	Le produit $7^6\times7^6$ vaut	14^6	7^{12}	7^{36}	*Amérique du S. 2016*

N.B. : *Il est beaucoup plus fréquent de voir des questions sur les puissances et écritures scientifiques dans un Q.C.M. que dans un exercice dédié au D.N.B.*

Réponses : **C – A – A – B – A – B**

Vidéos : Effectuer des calculs de puissances (1)
https://www.youtube.com/watch?v=IKmReDkNGp8&list=PLVUDmbpupCarJZUDfuY884ysOTix7G79g&index=7
Effectuer des calculs de puissances (2)
https://www.youtube.com/watch?v=_iwHYbuZ4N8&list=PLVUDmbpupCarJZUDfuY884ysOTix7G79g&index=8
EXERCICE : Effectuer des calculs de puissances
https://www.youtube.com/watch?v=GDHofGGcaI0&list=PLVUDmbpupCarJZUDfuY884ysOTix7G79g&index=15
COURS : Les puissances
https://www.youtube.com/watch?v=IxCzv5FPJ3s&list=PLVUDmbpupCarJZUDfuY884ysOTix7G79g&index=2

EXERCICES – CHAPITRE 2

I) Rappels – p.18

3 Complète.

a. $1{,}95 \times 10^{\cdots} = 1\,950$

b. $7 \times 10^{\cdots} = 700$

c. $6{,}3 \times 10^{\cdots} = 63\,000$

d. $5 \times 10^{\cdots} = 0{,}00005$

e. $8{,}9 \times 10^{\cdots} = 0{,}89$

f. $4{,}91 \times 10^{\cdots} = 0{,}0491$

4 Colorie les cases qui contiennent des nombres écrits en notation scientifique.

45×10^{-6}	$0{,}89 \times 10^{-6}$	8×10^{-5}
$4{,}6 \times 10^{17}$	10×10^{9}	7,91
0,68	$1{,}78 \times 10^{0}$	$3{,}14 \times 10^{14}$
$15{,}9 \times 10^{4}$	$83{,}45 \times 10^{-13}$	$9{,}99 \times 10$

5 Écris chaque nombre en notation scientifique.

a. 95 200 = ...

b. 6 = ...

c. 1 512,67 = ...

d. 46,31 = ...

e. 0,673 = ...

f. 0,006 = ...

g. 0,000 58 = ...

h. 0,0107 = ...

2 Donne l'écriture décimale de chaque nombre.

a. 6×10^{4} = ...

b. $4{,}84 \times 10^{2}$ = ...

c. $5{,}3 \times 10^{5}$ = ...

d. 2×10^{-3} = ...

e. $4{,}06 \times 10^{-1}$ = ...

f. $1{,}8 \times 10^{-5}$ = ...

II) Compléments sur les puissances – p.17 et 19 – Ex 19 issu de Sésamaths 4e

19 Écris sous la forme d'une puissance.

a. $3^4 \times 3^2$

b. $4^3 \times 4^{-5}$

c. $(-5)^{-4} \times (-5)^{3}$

d. $\dfrac{2^4}{2^5}$

e. $\dfrac{3^2}{3^{-3}}$

f. $\left(7^2\right)^3$

g. $\left(4^{-2}\right)^3$

h. $\left((-1)^2\right)^{-3}$

i. $7^5 \times 2^5$

j. $3^{-4} \times 5^{-4}$

k. $8^3 \times 4^3$

2 Complète les pointillés.

a. $2^{-3} = \dfrac{1}{2^{\cdots}}$

b. $(-5)^{-6} = \dfrac{1}{(-5)^{\cdots}}$

c. $4^{-2} = \dfrac{1}{4^{\cdots}}$

d. $7^{-1} = \dfrac{1}{7^{\cdots}}$

e. $10^{-5} = \dfrac{1}{10^{\cdots}}$

f. $1{,}5^{-4} = \dfrac{1}{1{,}5^{\cdots}}$

1 Écris l'inverse a^{-1} du nombre a sous la forme d'un nombre décimal ou d'une fraction.

a	5	0,25	3,5	$\frac{1}{3}$	$\frac{9}{5}$
a^{-1}					

3 Écris chaque expression sous la forme d'une puissance d'un nombre.

a. $\dfrac{1}{7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7} = \dfrac{1}{7^{\cdots}} = 7^{-\cdots}$

b. $\dfrac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \cdots = \cdots$

c. $\dfrac{1}{(-3) \times (-3) \times (-3)} = \cdots = \cdots$

d. $\dfrac{1}{2{,}5 \times 2{,}5 \times 2{,}5 \times 2{,}5 \times 2{,}5} = \cdots = \cdots$

7 Calcule chaque expression et donne le résultat en notation scientifique.

$A = 55 \times 10^{7} \times 5 \times 10^{-15}$

A = ...

A = ...

$B = 1{,}9 \times 10^{11} \times 3 \times 10^{-7}$

B = ...

B = ...

$C = \dfrac{36 \times 10^{-2}}{12 \times 10^{-8}}$

C = ...

C = ...

$D = \dfrac{2 \times 10^{5} \times 9 \times 10^{-4}}{15 \times 10^{3}}$

D = ...

D = ...

6 Écris chaque expression sous la forme d'une fraction.

a. $\left(\frac{4}{7}\right)^4 =$ ....

b. $\left(\frac{4}{7}\right)^{-4} =$ ....

c. $\left(\frac{10}{3}\right)^2 =$ ....

d. $\left(\frac{10}{3}\right)^{-2} =$ ....

7 Un couple fait un placement au taux annuel de 2 %, dont les intérêts sont capitalisés tous les ans. Le couple a placé le montant de 1 000 euros à l'ouverture, le 1er janvier 2010, puis laisse le capital sur ce compte sans effectuer de virements.

a. Explique pourquoi son capital est multiplié par 1,02 chaque année.

....

....

....

b. Complète le tableau suivant. Tu arrondiras si nécessaire au centième.

Année	2010	2011	2012	2013
Capital	1 000			

c. Écris et calcule l'expression qui permet de déterminer son capital au 1er janvier 2020. Tu arrondiras si nécessaire au centième.

....

....

d. À partir de quelle année son capital dépassera les 1 300 € ?

3 Afin de lutter contre la pollution de l'air, un département a contraint, dès l'année 2013, certaines entreprises à diminuer chaque année de 10 % la quantité de produits polluants qu'elles rejettent dans l'air. Ces entreprises ont rejeté 410 tonnes de ces polluants en 2013.

a. Quelle quantité de polluants ces entreprises ont-elles rejetée dans l'air en 2015 ? En 2019 ?

....

....

....

....

b. En admettant que ce taux de 10 % reste constant pour les années à venir, détermine à partir de quelle année la quantité de polluants rejetés par ces entreprises ne dépassera plus le seuil de 180 tonnes, fixé par le Conseil départemental.

....

....

....