CHAPITRE 3 – THÉORÈME DE THALÈS – CAS GÉNÉRAL

I) Rappels de 4ème

Théorème : Soient deux droites (d) et (d') sécantes en A. On considère B et M deux points distincts de (d), et C et N deux points distincts de (d'). Si (BC) // (MN), alors $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$.

Exemple :

Dans le triangle ABC, M $\in$ [AB], N $\in$ [AC] et les droites (BC) et (MN) sont parallèles.
Donc, d'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$, ce qui donne, en remplaçant par les longueurs connues : $\frac{25}{45}=\frac{20}{AC}=\frac{MN}{BC}$.

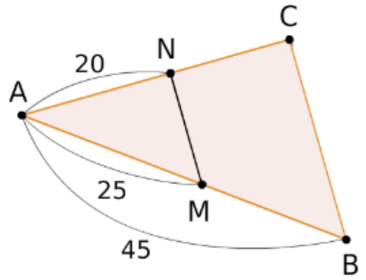
Notez bien qu'il aurait été impossible de déterminer BC ou MN : il faut nécessairement l'une des deux données pour déterminer l'autre. En clair, si l'on connaît un des côtés, on peut déterminer le côté manquant correspondant.

Calcul de AC :

$\frac{25}{45}=\frac{20}{AC}$ donc $25\times AC = 45\times 20$

$AC = \frac{45\times 20}{25}$

donc AC = 36 mm



Théorème : Soient deux droites (d) et (d') sécantes en A. On considère B et M deux points distincts de (d), et C et N deux points distincts de (d'). Si $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$, alors (MN) // (BC).

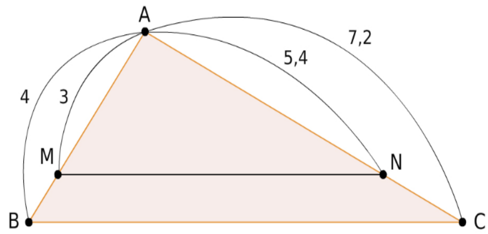
Remarque : Évidemment, si l'égalité n'est pas vérifiée, alors les droites ne sont pas parallèles !

Exemple : Dans le triangle ci-dessous, les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?

Dans le triangle ABC, M $\in$ [AB] et N $\in$ [AC]. On calcule séparément les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$.

D'une part, $\frac{AM}{AB}=\frac{3}{4}$. D'autre part, $\frac{AN}{AC}=\frac{5,4}{7,2}=\frac{54}{72}=\frac{\cancel{18}\times 3}{\cancel{18}\times 4}=\frac{3}{4}$.

On constate que $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

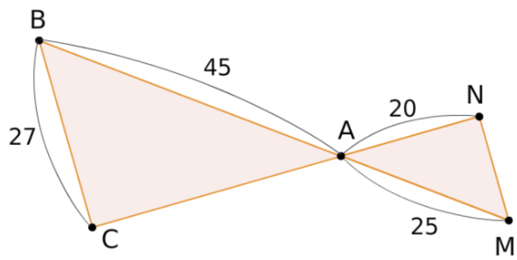


II) Configuration « papillon »

L'énoncé du théorème ne change pas. Seule la figure dans laquelle nous travaillons change. Les deux triangles ne sont plus emboîtés l'un dans l'autre mais sont opposés par un sommet. Bien que cette configuration ne change en rien l'énoncé ou la rédaction du théorème, il faut tout de même prendre garde à bien écrire les quotients utilisables. Voici deux exemples :

Application du théorème dans la configuration papillon

Exemple :
Les points A, B et M d'une part, et A, C et N d'autre part, sont alignés. Les droites (BC) et (MN) sont parallèles.
AM = 25 mm ; AB = 45 mm ; AN = 20 mm et BC = 27 mm.
On cherche à déterminer les longueurs AC et MN.



Les points A, B et M d'une part, et A, C et N d'autre part sont alignés.

Les droites (BC) et (MN) sont parallèles. Donc, d'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

On remplace par les longueurs connues : $\frac{25}{45} = \frac{20}{AC} = \frac{MN}{27}$.

Calcul de AC

$\frac{25}{45} = \frac{20}{AC}$ donc $25 \times AC = 45 \times 20$

$AC = \frac{45 \times 20}{25}$

donc AC = 36 mm

Calcul de MN

$\frac{25}{45} = \frac{MN}{27}$ donc $45 \times MN = 25 \times 27$

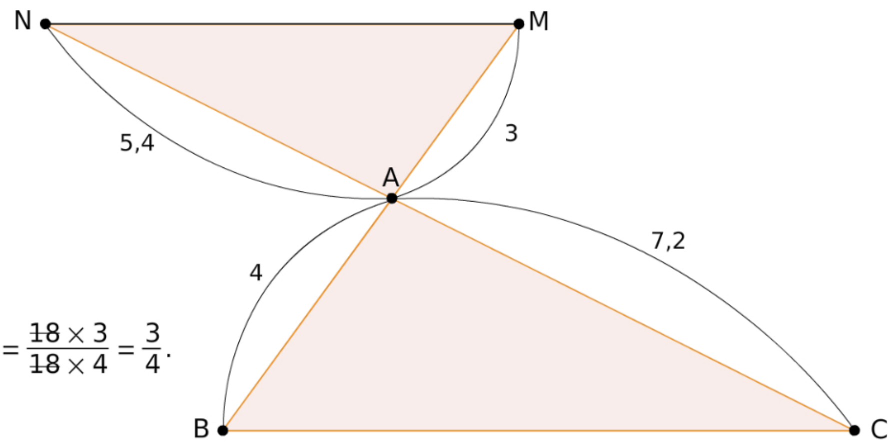
$MN = \frac{25 \times 27}{45}$

donc MN = 15 mm

Vidéos : Appliquer le théorème de Thalès (1)
https://www.youtube.com/watch?v=GwGQD2BdZ3s&list=PLVUDmbpupCaoOuZ7z5eQ0N7GOkjIoPlle&index=2
Appliquer le théorème de Thalès (2)
https://www.youtube.com/watch?v=cq3wBbXYB4A&list=PLVUDmbpupCaoOuZ7z5eQ0N7GOkjIoPlle&index=3

Application de la réciproque du théorème dans la configuration papillon

Exemple :
Dans cette figure, AM = 3 cm ; AB = 4 cm ; AC = 7,2 cm et AN = 5,4 cm.



Les points A, B et M d'une part, et A, C et N d'autre part, sont alignés dans le même ordre.

On calcule séparément les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$:

D'une part, $\frac{AM}{AB} = \frac{3}{4}$.

D'autre part, $\frac{AN}{AC} = \frac{5,4}{7,2} = \frac{54}{72} = \frac{\cancel{18} \times 3}{\cancel{18} \times 4} = \frac{3}{4}$.

On constate que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Vidéos : Appliquer la réciproque du théorème de Thalès
https://www.youtube.com/watch?v=uaPicwUSQz0&list=PLVUDmbpupCaoOuZ7z5eQ0N7GOkjIoPlle&index=6
Démontrer que deux droites ne sont pas parallèles
https://www.youtube.com/watch?v=ovlhagzONlw&list=PLVUDmbpupCaoOuZ7z5eQ0N7GOkjIoPlle&index=7

III) Observations théoriques

Derrière le théorème de Thalès se trouve une multitude de notions et de remarques géométriques. Voici quelques éléments remarquables :

- On peut passer d'une configuration « classique » à une configuration « papillon » en effectuant une symétrie centrale du triangle intérieur autour du sommet commun aux deux triangles. Comme la symétrie conserve les angles et les mesures, le théorème fonctionne aussi dans cette configuration.

- Comme il a déjà été mentionné en 4ème, derrière le théorème de Thalès se cache une situation de proportionnalité. En effet, les mesures du premier triangle sont proportionnelles à celui du second. On rappelle que ces triangles sont dits *semblables*.
- On verra plus tard que dans les deux configurations, les deux triangles sont liés par une homothétie de rapport positif dans le cas de la configuration classique, et de rapport négatif dans le cas de la configuration « papillon ».

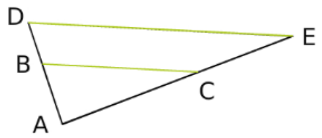
Vidéos : COURS : Théorème de Thalès
https://www.youtube.com/watch?v=puuHhlf0jAQ&list=PLVUDmbpupCaoOuZ7z5eQ0N7GOkjIoPlle&index=1
Résoudre un problème à l'aide de Thalès
https://www.youtube.com/watch?v=hmJQNkpi0gI&list=PLVUDmbpupCaoOuZ7z5eQ0N7GOkjIoPlle&index=4
EXERCICE : Résoudre un problème à l'aide de Thalès
https://www.youtube.com/watch?v=3lCqoS2IxGQ&list=PLVUDmbpupCaoOuZ7z5eQ0N7GOkjIoPlle&index=5
EXERCICE : Utiliser le théorème de Thalès et sa réciproque (1)
https://www.youtube.com/watch?v=YfTp0mBBexQ&list=PLVUDmbpupCaoOuZ7z5eQ0N7GOkjIoPlle&index=8
EXERCICE : Utiliser le théorème de Thalès et sa réciproque (2)
https://www.youtube.com/watch?v=4jYzkihBG_c&list=PLVUDmbpupCaoOuZ7z5eQ0N7GOkjIoPlle&index=9
QCM : Le théorème de Thalès
https://www.youtube.com/watch?v=exqS-TXgHpo&list=PLVUDmbpupCaoOuZ7z5eQ0N7GOkjIoPlle&index=13

EXERCICES – CHAPITRE 3

Les exercices sont ici inter-section - p.41, 42, 47, 48

1 Les droites en vert sont parallèles. Retrouve, pour chaque figure, les deux triangles et les deux droites parallèles puis écris l'égalité de rapports correspondante.

a.



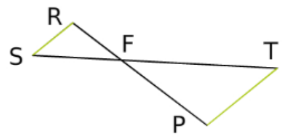
Les droites (..........) et (..........)

sont sécantes en ....

(..........) // (..........)

$\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

b.



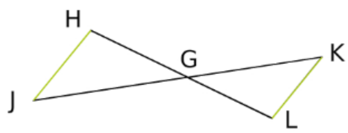
Les droites (..........) et (..........)

sont sécantes en ....

(..........) // (..........)

$\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

c.



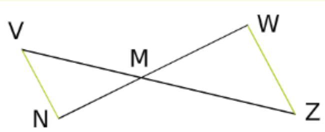
Les droites (..........) et (..........)

sont sécantes en ....

(..........) // (..........)

$\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

d.



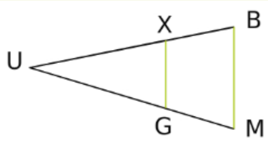
Les droites (..........) et (..........)

sont sécantes en ....

(..........) // (..........)

$\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

e.



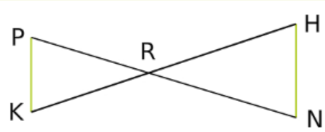
Les droites (..........) et (..........)

sont sécantes en ....

(..........) // (..........)

$\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

f.



Les droites (..........) et (..........)

sont sécantes en ....

(..........) // (..........)

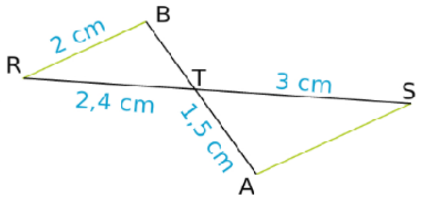
$\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

2 En te référant à l'exercice **1**, écris puis résous l'équation permettant de trouver le côté manquant.

a. AB = 4 ; AD = 5 ; AE = 12 Calcule AC. $\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ donc AC = ...	**b.** FS = 3,9 ; RS = 2,1 ; PT = 1,4 Calcule FT. $\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ donc FT = ...	**c.** GL = 7,2 ; GK = 6 ; GJ = 7 Calcule GH. $\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ donc GH = ...
d. MV = 12,8 ; MN = 8 ; MZ = 14,4 Calcule MW. $\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ donc MW = ...	**e.** BM = 15 ; UB = 23 ; XG = 4,5 Calcule UX. $\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ donc UX = ...	**f.** RH = 12,1 ; RK = 5,5 ; PK = 11,5 Calcule HN. $\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ donc HN = ...

1 Les droites (AS) et (BR) sont parallèles.

On veut calculer AS et TB. Complète les pointillés.



Les droites (.........) et (.........) sont sécantes en .....

(AS) .... (BR) donc, d'après le théorème de Thalès,

on a : $\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$ soit $\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

<u>Calcul de TB</u> :

$\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

soit TB = $\frac{\dots\dots \times \dots\dots}{\dots\dots}$

Donc TB = ... cm.

<u>Calcul de AS</u> :

$\frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}$

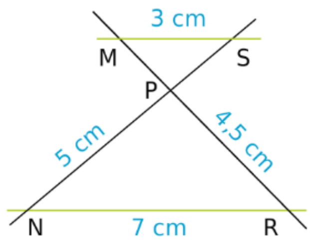
soit AS = $\frac{\dots\dots \times \dots\dots}{\dots\dots}$

Donc AS = ... cm.

2 Sur la figure ci-contre, les points M, P, R d'une part, et les points S, P, N d'autre part, sont alignés.
Les droites en vert sont parallèles.

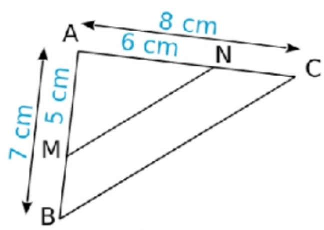
a. Calcule PM (tu arrondiras au dixième).

b. Calcule PS (tu arrondiras au dixième).



3 Les points A, M, B sont alignés, ainsi que les points A, N et C.

On veut montrer que les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.



a. Calcule et compare les rapports $\frac{AM}{AB}$ et $\frac{AN}{AC}$.

$\frac{AM}{AB}$ = ... | $\frac{AN}{AC}$ = ...

....

b. Conclus.

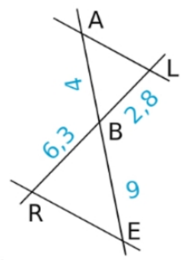
....

....

....

1 Sur la figure ci-contre, les points A, B et E sont alignés, de même que L, B et R. On veut montrer que les droites (AL) et (RE) sont parallèles.

Les longueurs sont en cm et la figure n'est pas à l'échelle.



a. Compare les rapports $\frac{BA}{BE}$ et $\frac{BL}{BR}$.

$\frac{BA}{BE}$ = ... | $\frac{BL}{BR}$ = ...

....

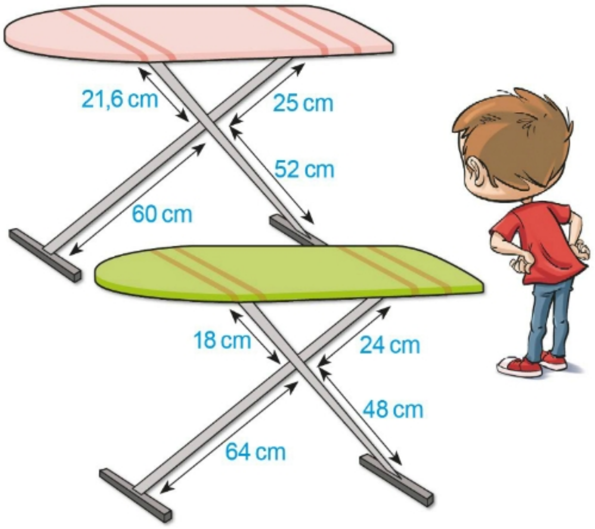
b. Précise la disposition des points.

....

....

c. Conclus.

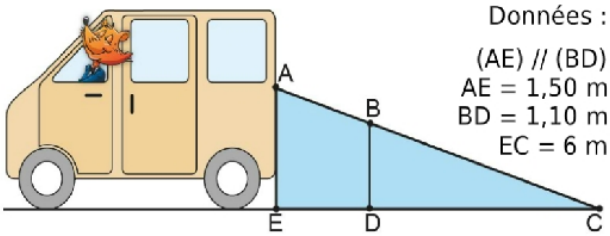
1 Ces deux tables à repasser sont posées sur un sol horizontal. Leur plateau est-il horizontal ? Justifie.



2 *Sécurité routière*

En se retournant lors d'une marche arrière, le conducteur d'une camionnette voit le sol à 6 mètres derrière son camion. Sur le schéma, la zone bleue correspond à ce que le conducteur ne voit pas lorsqu'il regarde en arrière.

Données :
(AE) // (BD)
AE = 1,50 m
BD = 1,10 m
EC = 6 m



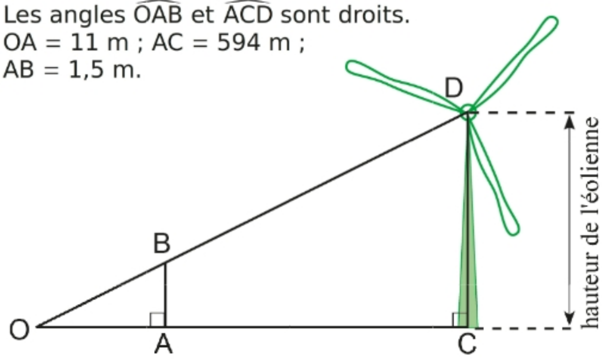
a. Calcule DC.

b. Déduis-en que ED = 1,60 m.

c. Une fillette mesure 1,10 m. Elle passe à 1,40 m derrière la camionnette. Le conducteur peut-il la voir ? Explique.

3 Pour trouver la hauteur d'une éolienne, on a les renseignements suivants :

Les points O, A et C sont alignés.
Les points O, B et D sont alignés.
Les angles $\widehat{OAB}$ et $\widehat{ACD}$ sont droits.
OA = 11 m ; AC = 594 m ;
AB = 1,5 m.



a. Explique pourquoi les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

....

....

b. Calcule la hauteur CD de l'éolienne. Justifie.

....

....

....

....

Le schéma n'est pas représenté en vraie grandeur.
Le segment [CD] représente l'éolienne.