

CHAPITRE 8 – NOTION DE FONCTIONS

I) Notion de fonction

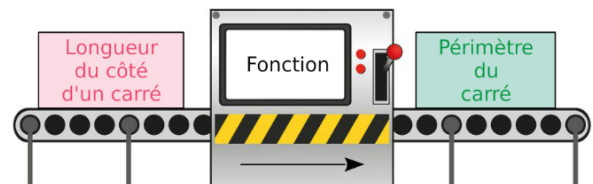
Définition : Une fonction f est un procédé qui à un nombre x associe un unique nombre $f(x)$. Ce procédé peut être donné sous différentes formes.

Notation : On note $f : x \rightarrow f(x)$, et on lit " f est la fonction qui à x associe l'unique nombre $f(x)$ "

Exemple : Si le côté d'un carré est x , alors son périmètre sera $4x$. Son aire sera x^2 . On peut alors dire que "Le périmètre d'un carré en fonction de son côté x est $4x$ " et que "L'aire d'un carré en fonction de son côté x est x^2 ". Si l'on nomme f la première fonction et g la seconde fonction, on note :

$$f : x \rightarrow 4x \text{ ou } f(x) = 4x \quad g : x \rightarrow x^2 \text{ ou } g(x) = x^2$$

Remarque : Attention à ne pas confondre f (qui est la fonction) et $f(x)$ (qui est un nombre).



Vidéo :

Résoudre un problème à l'aide d'une fonction

<https://www.youtube.com/watch?v=02mDFbESlBk&list=PLVUDmbpupCarIdEOAuWlW8bAFPU7JTp&index=3>

II) Images et antécédents

Définition : Soient f une fonction et a et b deux nombres tels que $f(a) = b$. On dit alors que :

- a est un antécédent de b par f . Il peut y avoir un, aucun, ou plusieurs antécédents.
- b est l'image de a par f . L'image est toujours unique.

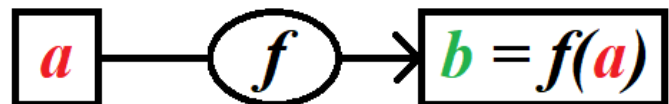
Exemple : Si l'on reprend les fonctions f et g de l'exemple précédent et que $x = 3$, alors :

- $f(3) = 4 \times 3 = 12$ Ainsi 12 est l'image de 3 par f , ou 3 est un antécédent de 12 par f .
- $g(3) = 3^2 = 3 \times 3 = 9$ Ainsi 9 est l'image de 3 par g , ou 3 est un antécédent de 9 par g .

Remarque : Le problème le plus fréquent est la confusion entre les images et les antécédents.

Quelques pistes : L'image est unique, donc si vous trouvez plusieurs valeurs dans la recherche d'une image, vous êtes peut-être en train de chercher un antécédent... L'image est le "résultat" de la fonction, ce qui se trouve "après". L'antécédent est ce qui se trouve "avant".

On peut modéliser l'effet d'une fonction de la façon suivante pour résumer tout ceci.



Il existe trois scénarii possibles où l'on peut vous demander de déterminer des images ou des antécédents qui sont détaillés dans les sections suivantes :

1) A partir d'une expression littérale

La recherche d'image et d'antécédent par expression littérale correspond à la résolution d'une équation ou d'un simple calcul à partir de l'expression donnée.

Exemple : Soient f et g deux fonctions telles que $f(x) = 2x$ et $g(x) = 5x - 1$. Déterminer :

- L'image de 6 par f .

Il suffit de remplacer x par 6 et d'effectuer le calcul. On a $f(6) = 2 \times 6 = 12$ donc on peut dire que 12 est l'image de 6 par f .

- L'antécédent de 14 par g .

Pour cela on doit trouver la valeur de x telle que $g(x) = 14$, ce qui signifie avec son expression que $5x - 1 = 14$. On comprend que $5x = 15$ et donc que $x = 3$. Ceci signifie donc que $x = 3$ est un antécédent de 14 par g .

Vidéos :

Calculer une image par une fonction

<https://www.youtube.com/watch?v=FjqPwHS7vE8&list=PLVUDmbpupCarIdEOAuW8bAFPU7JTp&index=7>

Calculer un antécédent par une fonction

<https://www.youtube.com/watch?v=0NakIDu5dQU&list=PLVUDmbpupCarIdEOAuW8bAFPU7JTp&index=8>

EXERCICE : Calculer une image par une fonction

<https://www.youtube.com/watch?v=QpbJR6O5Fx0&list=PLVUDmbpupCarIdEOAuW8bAFPU7JTp&index=8>

2) A partir d'un tableau de valeurs

Définition : Les images respectives par la fonction f de certaines valeurs de x peuvent être représentées dans un tableau de valeurs, présenté comme suit :

x	...	...	...	← antécédents
$f(x)$	...	...	...	← images

Exemple :

Voici un **tableau de valeurs** de la fonction $f: x \mapsto x^2 - 4$.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12

La 2^{de} ligne du tableau donne les images des nombres de la 1^{re} ligne par la fonction f .

- Pour déterminer l'image de 0 par la fonction f , on cherche 0 sur la 1^{re} ligne du tableau et on lit son **image** sur la 2^{de} ligne. L'**image** de 0 par la fonction f est -4. On écrit : $f(0) = -4$.
- Pour déterminer le (ou les) antécédent(s) de 5 par la fonction f , on cherche 5 sur la 2^{de} ligne du tableau et on lit **son (ses) antécédent(s)** sur la 1^{re} ligne. Les **antécédents** de 5 par la fonction f sont -3 et 3. On écrit : $f(-3) = f(3) = 5$.

Vidéos :

Compléter un tableau de valeurs

<https://www.youtube.com/watch?v=BHrBGehewi0&list=PLVUDmbpupCarIdEOAuW8bAFPU7JTp&index=3>

Déterminer une image et un antécédent dans un tableau

<https://www.youtube.com/watch?v=EOS5bSPTZjg&list=PLVUDmbpupCarIdEOAuW8bAFPU7JTp&index=4>

EXERCICE : Déterminer une image ou un antécédent dans un tableau

<https://www.youtube.com/watch?v=9Fzp1hZqltM&list=PLVUDmbpupCarIdEOAuW8bAFPU7JTp&index=5>

3) A partir d'une représentation graphique

Définition : La *représentation graphique* d'une fonction f est l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ dans un repère. Il s'agit de la courbe qui représente la fonction.

Méthode : Pour déterminer...

- L'image d'un nombre x par une fonction, on part de la valeur de x sur l'axe des abscisses. On rejoint perpendiculairement la courbe, puis on lit sur l'axe des ordonnées la valeur correspondante.

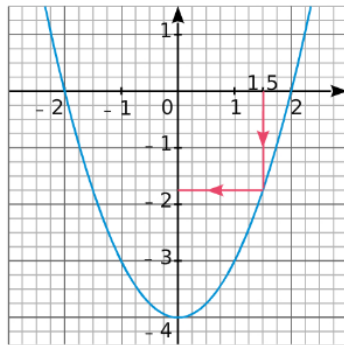
- Un antécédent d'une valeur de f , on part de la valeur donnée sur l'axe des ordonnées et on trace une droite perpendiculaire à l'axe des ordonnées. A chaque intersection, on peut lire la valeur de x correspondante sur l'axe des abscisses.

Remarque : Ceci signifie que dans un repère, l'axe des abscisses est l'axe où se trouvent les " x ", donc les antécédents, et que l'axe des ordonnées est l'axe où se trouvent les " $f(x)$ ", donc les images.

Exemple :

Exemple : Les graphiques ci-dessous représentent la fonction $f: x \mapsto x^2 - 4$.

$f(-1) = -3$. Donc le point $(-1; -3)$ est un point de la représentation graphique de la fonction f .

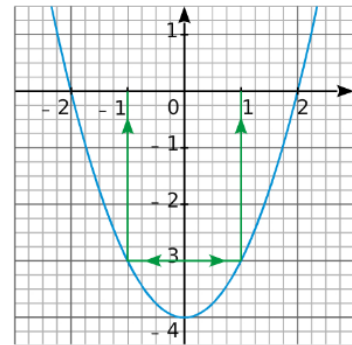


Pour déterminer graphiquement l'image de 1,5 par la fonction f , on cherche l'ordonnée du point de la représentation graphique de f qui a pour abscisse 1,5.

Il semble que cette ordonnée soit égale à -1,75.

On peut le vérifier par le calcul :

$$f(1,5) = 1,5^2 - 4 = 2,25 - 4 = -1,75$$



Pour déterminer graphiquement le (ou les) antécédent(s) de -3 par la fonction f , on cherche l'abscisse du (ou des) point(s) de la représentation graphique de f ayant pour ordonnée -3.

Deux points ont pour ordonnée -3.

Ils semblent avoir pour abscisse -1 et 1 donc -3 admet deux antécédents.

On peut le vérifier par le calcul :

$$f(-1) = (-1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3 \text{ et}$$

$$f(1) = 1^2 - 4 = 1 - 4 = -3$$

Vidéos :

Représenter graphiquement une fonction

<https://www.youtube.com/watch?v=xHJNdrhzY4Q&list=PLVUDmbpupCarIdEOAuWlW8bAFPU7JTp&index=9>

Lire graphiquement une image et un antécédent

<https://www.youtube.com/watch?v=gQUt5y8LFKk&list=PLVUDmbpupCarIdEOAuWlW8bAFPU7JTp&index=10>

EXERCICE : Lire graphiquement une image et un antécédent

<https://www.youtube.com/watch?v=UdWvkSwlBh0&list=PLVUDmbpupCarIdEOAuWlW8bAFPU7JTp&index=11>

EXERCICES – CHAPITRE 8

1) Notion de fonctions, p.92 et manuel p.116-117

3 Sachant que $f(2) = -3$ et que $g(0) = 4$, compose quatre phrases avec les mots et les nombres suivants.

fonction f

-3

4

fonction g

image

0

antécédent

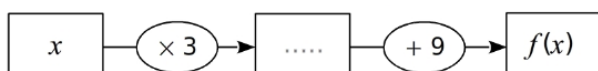
2

4 Traduis chaque phrase ci-dessous par une égalité.

- L'image de 2 par la fonction h est 4,5.
- 2,5 a pour image -4,2 par la fonction f .
- Par la fonction g , -4 est l'image de -6.

- 1** Traduis chaque phrase par une égalité.
- 4 a pour image 5 par la fonction f .
 - 3 a pour image 0 par la fonction g .
 - L'image de 17,2 par la fonction h est - 17.
 - L'image de - 31,8 par la fonction k est - 3.
 - 4 a pour antécédent 5 par la fonction f .
 - 3 a pour antécédent 0 par la fonction g .
 - Un antécédent de 7,2 par la fonction h est - 1.
 - Un antécédent de - 5 par la fonction k est - 8.

- | | |
|---------|---------|
| a. | e. |
| b. | f. |
| c. | g. |
| d. | h. |



13 Traduis chacune des phrases suivantes par une correspondance de la forme : $x \mapsto \dots$

- Pour calculer l'image d'un nombre x , on le multiplie par 2, puis on ajoute 3 au résultat.
- Pour calculer l'image d'un nombre x , on calcule son carré, puis on soustrait 4 au résultat.
- Pour calculer l'image d'un nombre x non nul, on multiplie l'inverse de ce nombre par - 9.
- Réécrire les associations obtenues ci-dessus en nommant les fonctions étudiées f , g et h .

6 Soit h la fonction qui, à un nombre, associe l'opposé de son inverse.

- Quelle est l'image de 3 par h ?
- Donne l'expression de h en fonction de x .

11 Ce diagramme illustre le procédé de calcul d'une fonction f . Détermine l'expression de $f(x)$.

II) Images, antécédents

1) A partir d'une expression, p.93-94

1 On considère la fonction f qui, à tout nombre, associe son carré. Calcule.

- | | |
|--------------------|----------------------|
| a. $f(2) = \dots$ | c. $f(1,2) = \dots$ |
| b. $f(-3) = \dots$ | d. $f(-3,6) = \dots$ |
- e. Donne un antécédent de 4 par f :
- f. Donne un antécédent de 5 par f :

2 On considère ce programme de calcul.

- Choisir un nombre.
- Lui ajouter 5.
- Multiplier cette somme par 3.
- Soustraire 6 à ce produit.



a. Teste ce programme avec le nombre 2.

.....

b. En notant x le nombre choisi au départ, détermine la fonction g qui associe à x le résultat obtenu avec le programme.

.....

c. Détermine $g(0)$.

.....

d. Quel nombre faut-il choisir pour obtenir 18 ?

.....

.....

3 Soit la fonction k qui, à tout nombre x , associe le nombre $6x^2 - 7x - 3$. Calcule.

- | | |
|-------------------|--------------------|
| a. $k(0) = \dots$ | b. $k(-1) = \dots$ |
|-------------------|--------------------|

c. $k\left(\frac{3}{2}\right)$

.....

.....

.....

.....

.....

d. $k\left(-\frac{1}{3}\right)$

.....

.....

.....

.....

.....

4 On appelle h la fonction qui, à un nombre, associe le résultat obtenu avec le programme de calcul suivant.

- Choisir un nombre.
- Lui ajouter - 5.
- Calculer le carré de la somme obtenue.

a. Complète le tableau de valeurs suivant.

x	- 3	- 2	0	2	5	π
$h(x)$						

b. Quelle est l'image de 0 par h ?

c. Donne un antécédent de 0 par h :

1 Dégagement d'un gardien de but

Soit t le temps écoulé en secondes depuis le tir, et $h(t)$ la hauteur en mètres du ballon au-dessus du sol.

La fonction h est définie par : $t \mapsto -5t^2 + 20t$.

a. À quelle hauteur se trouvera le ballon au bout d'une seconde ? Et au bout de deux secondes ?

.....
.....

b. Calcule $h(4)$. Déduis-en un encadrement des valeurs possibles de t .

.....
.....

.....

2) A partir d'un tableau de valeurs, p.92

2 Voici un tableau de valeurs d'une fonction f .

x	-3	-1	0	2	4	5
$f(x)$	7	-2	3	5	-3	6

Quelle est l'image par la fonction f de...

a. 0 ? b. 5 ? c. -3 ?

Donne un antécédent par la fonction f de...

d. 7 e. 5 f. -3

5 Voici un tableau de valeurs d'une fonction h .

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0
$h(x)$	-1,5	-2	1,4	-1,8	-1,5	0,25	2

Complète chacune des égalités suivantes.

a. $h(-2,5) = \dots\dots\dots$ d. $h(\dots\dots\dots) = -1,5$

b. $h(\dots\dots\dots) = -1,8$ e. $h(-0,5) = \dots\dots\dots$

c. $h(0) = \dots\dots\dots$ f. $h(\dots\dots\dots) = 1,4$

7 Complète le tableau de valeurs de chacune des fonctions vérifiant toutes ces conditions.

- a. . $q(-3) = -9$. $q(0) = -5$
. $q(1) = -\frac{11}{3}$. $q(2) = -\frac{7}{3}$
. L'image de 6 par la fonction q est 3.
. 9 a pour image 7 par la fonction q .
- b. . $w(-1) = 1,5$. $w(4) = 46,5$
. $w(1) = -4,5$
. Un antécédent de 13,5 par la fonction w est 3.
. -1,5 a pour antécédents 0 et 2 par la fonction w .

c. Complète le tableau de valeurs suivant.

t	0	1	1,5	2	2,5	3	4
$h(t)$							

d. Au bout de combien de temps le ballon semble-t-il avoir atteint sa hauteur maximale ?

.....

2 On considère la fonction h définie par :
 $h : x \mapsto -2x + 5$.

a. Complète le tableau.

x	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8
$h(x)$						

b. Donne un antécédent de 0 par h :

3 Voici des indications sur une fonction k .

- L'image de 2 par k est 5,5.
- $k : -10 \mapsto -6$ et $k(-6) = 2$.
- Un antécédent de -4 par k est 5,5.
- Les antécédents de 5,5 sont 2, -4 et 125.

Complète le tableau grâce à ces indications.

x						
$k(x)$						

4 Voici un tableau de valeurs d'une fonction g .

x	-2	-1	0	1	2
$g(x)$	1	2	-1	-4	3

Complète avec « image » ou « antécédent ».

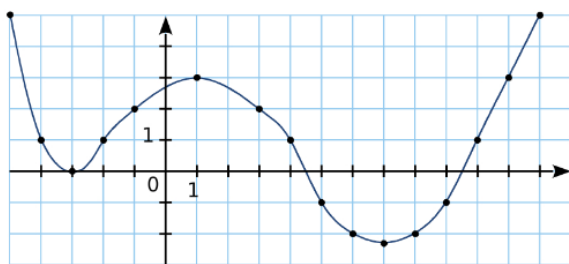
- a. 1 est de -2 par g .
- b. 2 est de 3 par g .
- c. -4 est de 1 par g .
- d. 2 est de -1 par g .
- e. 0 est de -1 par g .
- f. Combien d'image(s) a le nombre 1 par g ?

x						
$q(x)$						

x						
$w(x)$						

3) A partir d'un graphique, p.95-96

2 Ce graphique représente une fonction g , pour x compris entre -5 et 12 .



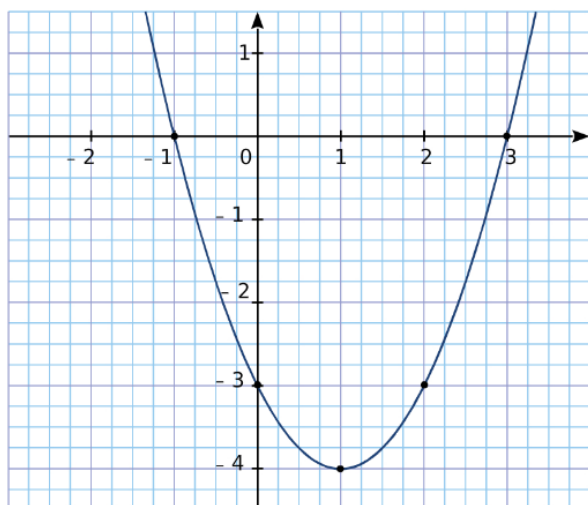
- Place le point E de la courbe d'abscisse 1.
- Quelle est l'ordonnée de E ?
- Place le point F de la courbe d'abscisse 8.
- Quelle est l'ordonnée de F ?
- Place, sur la courbe, les points $G_1, G_2, G_3, \dots$ qui ont pour ordonnée 1.
- Donne les coordonnées de chacun de ces points.
.....
.....
- Combien de points ont pour ordonnée -2 ?
Ecris les coordonnées de ces points.
.....
.....

3 Reprends la représentation graphique de l'exercice 2 et 4 et complète le tableau de valeurs.

x	-5	-4	-3	-2	-1	1	3	4	5	6	8	9	10	12
$g(x)$														

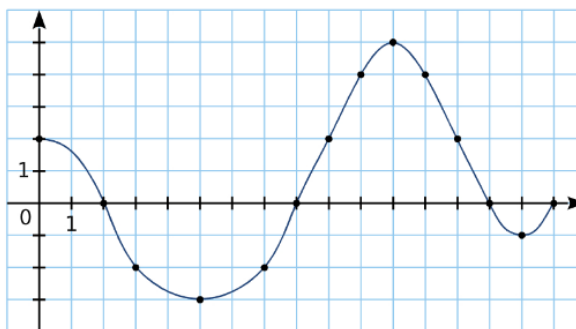
x	0	2	3		7	8	9	10		12	13	14	15	16
$k(x)$				-3					5					

2 Ce graphique représente la courbe d'une fonction g .



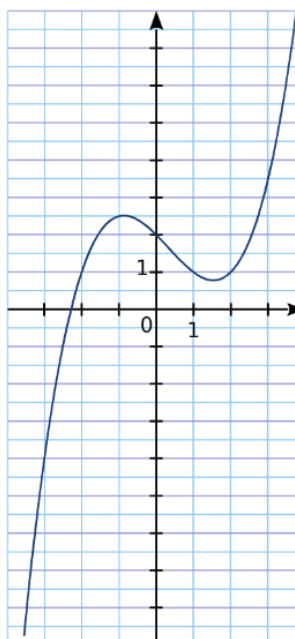
- L'image de 1 par la fonction g est
- Les antécédents de 0 par la fonction g sont

4 Le graphique suivant représente une fonction k , pour x compris entre 0 et 16. Complète les phrases et réponds aux questions.



- L'image de 5 par la fonction k est
- L'image de 8 par la fonction k est
- Quels sont les antécédents de 2 par k ?
.....
- Quels nombres ont pour image -2 par k ?
.....
- Quels sont les antécédents de 0 par k ?
.....
- Quels nombres entiers ont deux antécédents ?
.....

1 Ce graphique représente une fonction h .



Complète.

- $h(-2) = \dots\dots\dots$
- $h(-1) = \dots\dots\dots$
- $h(\dots\dots\dots) = -4$
- $h(0) = \dots\dots\dots$
- $h(1) = \dots\dots\dots$
- $h(2) = \dots\dots\dots$
- $h(\dots\dots\dots) = 3,5$
- Quels sont les antécédents de 1 par h ?
.....
.....