Droites remarquables dans un triangle, compléments

Maxime KIENTZ

17 septembre 2022

Prérequis : *Notions basique sur les triangles*
Niveau : *5ème*

Au cours de l'année de 6ème, la médiatrice d'un segment est étudiée comme étant la droite perpendiculaire à un segment passant par son milieu. Son utilisation est cependant limitée aux symétries axiales, alors que les médiatrices ont des propriétés plus intéressantes dans les triangles. De même, on étudie en 5ème les hauteurs d'un triangle pour le calcul de son aire, mais sans réellement s'intéresser aux propriétés plus notables de ces droites. Cet article a pour but de présenter les deux autres types de droites oubliées dans les programmes, ainsi que de compléter les propriétés de toutes ces droites. Dans tout l'article ABC sera un triangle quelconque, signifiant que ceci fonctionne pour tous les triangles !

1 Un complément sur les droites connues

1.1 Les médiatrices

Définition : La médiatrice d'un segment est une droite perpendiculaire à ce segment passant par son milieu.

Cette définition est bien connue dans les programmes de 6ème car on se base sur son existence pour créer un axe de symétrie, utilisant souvent le fait que l'axe de symétrie est la médiatrice du segment formé par un point et son image par la symétrie. Notamment, la notion d'équidistance entre ces deux points en découle, point essentiel de la symétrie axiale. Cependant, cette notion peut rapidement être étendue aux triangles, qui sont composés de trois côtés qui ne sont rien d'autre que trois segments. Traçons dans un triangle ABC les trois médiatrices, une par côté, et observons qu'en traçant correctement ces trois droites, elles se croisent en un même point comme le montre la **Figure 1**.

Propriété Les trois médiatrices d'un triangles sont concourantes en un même point, appelé **centre du cercle circonscrit** du triangle.

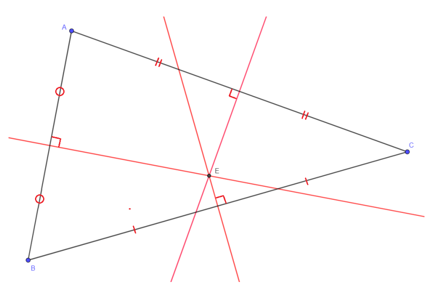

FIGURE 1 – Les trois médiatrices d'un triangle et leur point d'intersection

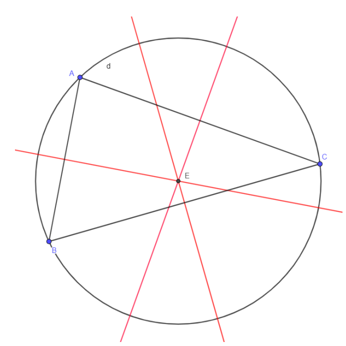

FIGURE 2 – Le cercle circonscrit de ce même triangle

Encore faut-il savoir ce qu'est ce cercle circonscrit. Son nom signifie qu'il s'agit d'un cercle "*entourant*" le triangle. Mathématiquemetnt parlant, le cercle circonscrit du triangle est l'unique cercle passant par les trois sommets du triangle. Et il s'avère que le centre de ce triangle est justement le point d'intersection des médiatrices. On peut le voir dans la **Figure 2** ci-dessus.

1.2 Les hauteurs

Définition : Dans un triangle, la hauteur issue d'un sommet est la droite passant par ce sommet et perpendiculaire au côté opposé au sommet.

A nouveau, le triangle possédant trois sommets, il existe trois hauteurs dans chaque triangle. Traditionnellement, ces droites sont utilisées pour calculer l'aire du triangle : la mesure du segment intérieur au triangle de la hauteur est une donnée de la formule de l'aire du triangle. Mais, à l'instar des médiatrices, on peut tracer les trois hauteurs et observer que ces trois droites se croisent elles aussi en un même point comme le montre la **Figure 3**.

Propriété Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un même point, appelé **orthocentre** du triangle.

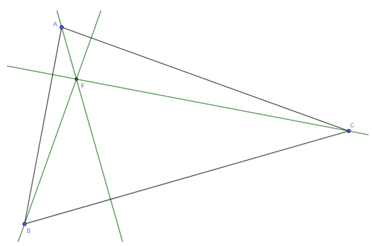

FIGURE 3 – Les trois hauteurs d'un triangle et l'orthocentre

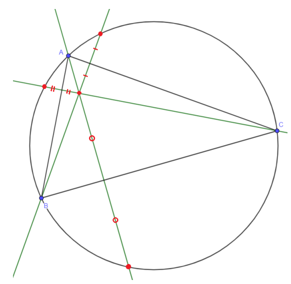

FIGURE 4 – Les symétriques de l'orthocentre sont sur le cercle circonscrit

Cette fois-ci, il n'est pas question de cercle à tracer, mais on pourra tout de même noter que le symétrique de l'orthocentre par rapport aux trois côtés du triangle fait apparaître trois points qui se trouvent sur le cercle circonscrit mentionné plus haut, et ceci est illustré dans la **Figure 4**.

2 Les autres droites remarquables

2.1 Les bissectrices

Ces droites étaient anciennement au programme en 6ème, lorsque les angles étaient étudiés. Couper un angle en deux angles égaux était au programme et la droite tracée pour effectuer ceci était considérée comme importante.

Définition : La bissectrice d'un angle est droite permettant de couper cet angle en deux angles de même mesures.

Là encore, rien n'est laissé au hasard et les mathématiques font bien les choses vu que ces droites se coupent elles aussi en un même et unique point comme l'illustre la **Figure 5**.

Propriété Les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes en un même point, appelé **centre du cercle inscrit** du triangle.

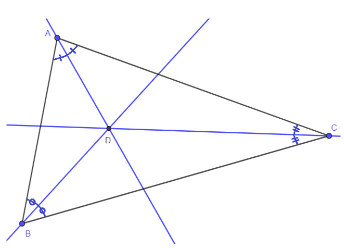

FIGURE 5 – Les trois bissectrices d'un triangle et leur point d'intersection

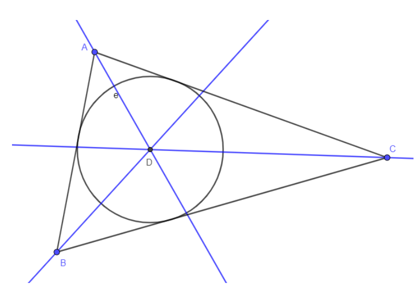

FIGURE 6 – Le cercle inscrit de ce même triangle

A l'instar du cercle circonscrit, le cercle inscrit est un cercle particulier pour un triangle : il s'agit du cercle d'aire maximale pouvant être inséré à l'intérieur d'un triangle. Il s'avère que le centre de ce cercle est l'intersection des bissectrices, comme le montre la **Figure** 6 ci-dessus.

2.2 Les médianes

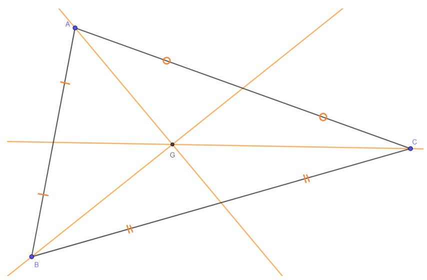

FIGURE 7 – Les trois médiatrices d'un triangle et le barycentre

Définition : Dans un triangle, une médiane est une droite passant par un sommet du triangle et par le milieu du côté opposé de ce sommet.

Vous l'aurez compris, il y en a également trois. A nouveau, traçons-les, et l'issue ne devrait maintenant plus vous surprendre : un point d'intersection apparaît, affiché dans la **Figure 7**.

Propriété Les trois médianes d'un triangles sont concourantes en un même point, appelé **barycentre** ou **centre de gravité** du triangle.

Quant à sa signification, pas de cercle cette fois ci ! Cependant, le terme barycentre désigne un "*point d'équilibre*" pour la figure. Tout polygône "*plein*" possède un barycentre, c'est donc un nom qui désigne quelque chose de relativement fréquent en géométrie. En pratique, il s'agit du point sur lequel vous devez poser votre triangle découpé, sur un crayon ou un stylo, pour le faire tenir en équilibre (**Figure 8**) ! C'est pour cela qu'on surnomme parfois ce point le centre de gravité du triangle. Si un point mérite bien d'être appelé "*centre du triangle*", ce serait celui-ci.

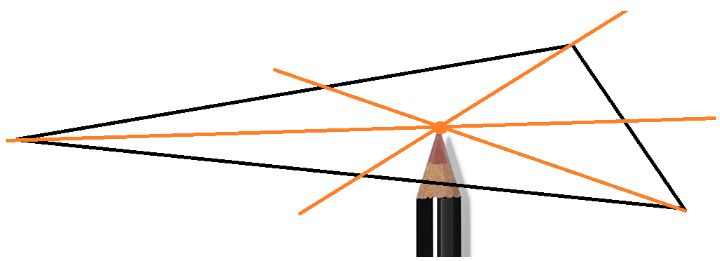

FIGURE 8 – Le barycentre, point d'équilibre du triangle

3 La droite d'EULER

Toute cette étude de droites et de points ne serait pas parfaite sans une conclusion impressionante. En 1765, EULER[1] découvre et prouve que dans un triangle quelconque, il existe une droite passant par plusieurs points remarquables du triangle, dont l'orthocentre, le centre de gravité (ou barycentre) et le centre du cercle circonscrit.

En revanche, elle ne passe pas par le centre du cercle inscrit dans le triangle (point d'intersection des bissectrices, auparavant en bleu). Le seul cas où ceci se produit est si celui-ci est isocèle. Dans ce cas, la droite d'EULER est même l'axe de symétrie du triangle ! En pratique, ceci signifie que tous les points mentionnés plus haut sont alignés, sauf celui des bissectrices !

Cette découverte, connue avant EULER, est en fait due au mathématicien écossais Robert SIMSON[2] à qui on n'a pas attribué le nom car il existe dejà une droite de SIMSON. La démonstration de ceci se trouve dans l'ouvrage d'EULER "*Solutions faciles de problèmes difficiles en géométrie*", ce qui lui donna son nom par après.

Pour terminer cet article, voici une illustration d'un triangle où la droite d'EULER est tracée, passant bien par les trois points mentionnés ci-dessus.

1. Léonard EULER - 15 avril 1707 ; 7 septembre 1783 , est un mathématicien et physicien suisse parmi les plus éminents que ce monde ait connu
2. Robert SIMSON - 14 octobre 1687 ; 1er octobre 1768 est un mathématicien écossais célèbre pour ses contributions en géométrie, notamment la droite de SIMSON

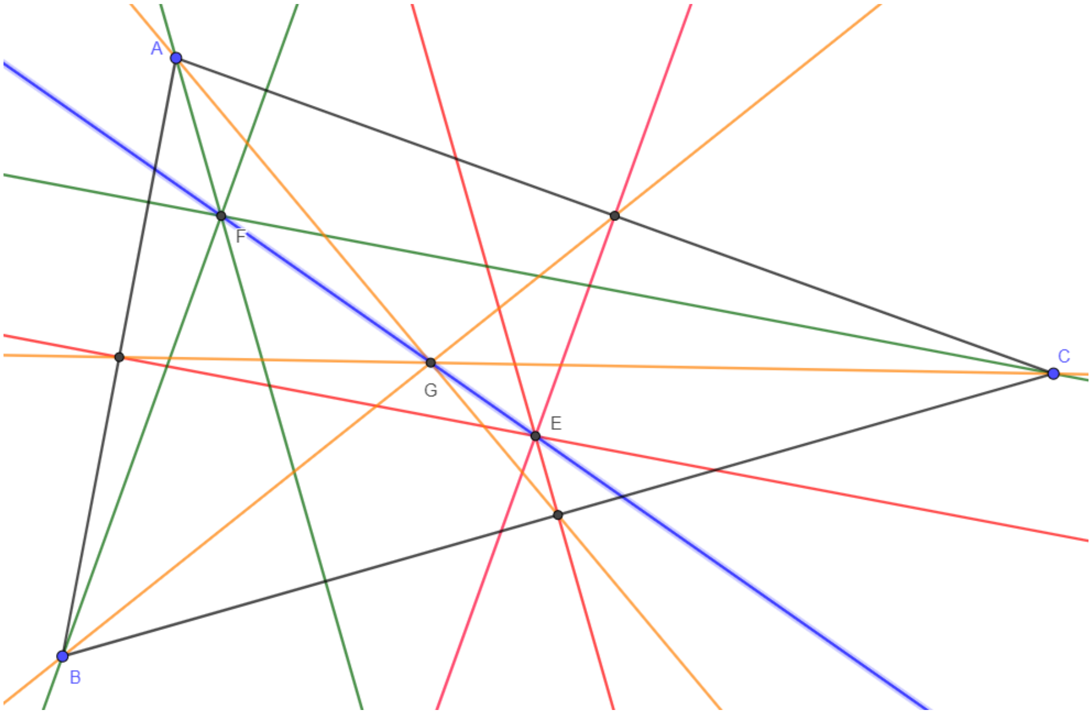

Figure 9 – Les hauteurs, médiatrice, médianes, et leurs points d'intersection respectifs sont tous alignés sur la droite d'Euler, en bleu.

Si vous voulez manipuler ces différentes droites, vous pouvez vous rendre sur cette page sur laquelle un fichier GéoGebra est disponible : `https://www.maths-et-tiques.fr/index.php/detentes/droite-euler`

"Le livre de l'Univers est écrit en langage mathématiques." - GALILEE