

CHAPITRE 13 - ARITHMÉTIQUE

I) Rappels sur les nombres premiers

1) Notion de nombre premier, liste

Parmi tous les nombres entiers, il existe une famille de nombres « *spéciaux* » qui possède que très peu de diviseurs. On a la définition suivante :

Définition : Un *nombre premier* est un nombre qui ne possède comme diviseur que 1 et lui-même.

Exemple :

- 7 est un nombre premier, ses seuls diviseurs sont 1 et 7.
- 8 n'est pas un nombre premier, car il a comme diviseurs 1; 2; 4; 8.

Propriétés :

- Il existe une infinité de nombres premiers.
- La liste des nombres premiers de 1 à 100 est :
2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97

Pour déterminer si un nombre est premier ou non, il faut donc rechercher ses diviseurs, possiblement à l'aide de critères de divisibilités, et conclure. Pour faciliter la recherche, voici une petite technique pour savoir jusqu'où chercher (utile, mais hors-programme).

Propriété : Un entier n est premier s'il n'est divisible par aucun entier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$

Exemple : 147 est-il premier ? Pour le savoir, il suffit de tester tous les diviseurs possibles inférieurs ou égaux à $\sqrt{147} \approx 12,124..$, donc inférieurs à 12. On verra la réponse en exercice.

Vidéos : Déterminer tout les diviseurs d'un nombre
<https://www.youtube.com/watch?v=jteZZBzyai8&list=PLVUDmbpupCappZMuDL7e9MdUfjuOZMwdR&index=2>
EXERCICE : Appliquer les critères de divisibilité
<https://www.youtube.com/watch?v=BJDE6uOrmYQ&list=PLVUDmbpupCappZMuDL7e9MdUfjuOZMwdR&index=4>
Reconnaitre un nombre premier
<https://www.youtube.com/watch?v=g9PLLhnCv88&list=PLVUDmbpupCappZMuDL7e9MdUfjuOZMwdR&index=5>

II) Décomposition en facteurs premiers

Le résultat qui suit est un important résultat en mathématiques. Il s'énonce de la façon suivante :

Propriété : Tout nombre entier positif s'écrit d'une unique façon sous la forme d'un produit de facteurs premiers. Cette écriture se nomme la *décomposition en facteurs premiers* du nombre.

Exemples :

- $78 = 2 \times 3 \times 13$
- $50 = 2 \times 5 \times 5 = 2 \times 5^2$
- $120 = 2^3 \times 3 \times 5$

1) Effectuer la décomposition

Bien que la décomposition d'un nombre existe à coup sûr, il faut encore savoir la déterminer. Pour réaliser ceci, on va diviser successivement le nombre en question par des nombres premiers, jusqu'à aboutir à 1. La liste des diviseurs successifs sera la décomposition du nombre de départ.

Exemple : On décompose le nombre 4680 en produit de facteurs premiers. La méthode la plus efficace consiste à chercher les diviseurs premiers de 4680 dans l'ordre croissant :

• 4680 est divisible par 2	$4680 = 2 \times 2340$	4680	2
• 2340 est divisible par 2	$4680 = 2 \times 2 \times 1170$	2340	2
• 1170 est divisible par 2	$4680 = 2 \times 2 \times 2 \times 585$	1170	2
• 585 est divisible par 3	$4680 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 195$	585	3
• 195 est divisible par 3	$4680 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 65$	195	3
• 65 est divisible par 5	$4680 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 13$	65	5
• 13 est divisible par 13, qui donne 1, donc $4680 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 13$		13	13
		1	

Remarque : On écrit souvent la décomposition de la façon ci-contre, en colonne.

Exemples : Décomposer 165 et 5100 en produit de facteurs premiers. Voici leurs décompositions en colonne :

On a donc les décompositions suivantes :

- $165 = 3 \times 5 \times 11$
- $5100 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \times 17$

165	5	5100	2
33	3	2250	2
11	11	1275	3
1		425	5
		85	5
		17	17
		1	

Remarque : L'ordre croissant des diviseurs est le plus méthodique mais n'est pas obligatoire. Dans le premier exemple on a divisé par 5 avant de diviser par 3. Parfois, certains diviseurs sont plus évidents plus tard dans la décomposition.

Vidéos :

Décomposer un nombre en produits de facteurs premiers

https://www.youtube.com/watch?v=BlGaIqNz_pk&list=PLVUDmbpupCapU7yuO56b8Pay5Hx8RwpUn&index=6

EXERCICE : Décomposer un nombre en produits de facteurs premiers

<https://www.youtube.com/watch?v=v5f-yyFC9ck&list=PLVUDmbpupCapU7yuO56b8Pay5Hx8RwpUn&index=7>

2) Application à la simplification de fractions

On a vu dans les chapitres précédents que deux fractions différentes peuvent être égales. Si tel est le cas, ceci signifie que le numérateur et le dénominateur de la première fraction peuvent être multiplié/divisé par un nombre pour obtenir la seconde fraction. Par exemple :

$$\frac{24}{16} = \frac{3}{2} \quad \text{car} \quad \frac{24}{16} = \frac{3 \times 8}{2 \times 8} = \frac{3}{2} \quad (\text{rappel : on dit qu'on a simplifié } \frac{24}{16} \text{ par } 8)$$

De plus, on rappelle qu'une fraction est irréductible si le numérateur et le dénominateur ne peuvent plus être divisés par un même nombre commun. En reformulant, une fraction est irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux. Cela signifie donc que le seul diviseur commun au numérateur et au dénominateur est 1. La décomposition en facteurs premiers permet alors de simplifier efficacement une fraction à la main.

Méthode : Rendre une fraction irréductible.

- On décompose le numérateur et le dénominateur en produit de facteurs premiers;
- On simplifie la fraction en supprimant les facteurs qui apparaissent à la fois au numérateur et au dénominateur (on en supprime autant au numérateur qu'au dénominateur).

Exemple : Pour décomposer $\frac{780}{1530}$ on effectue d'abord la décomposition de chacun des nombres :

$$780 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 13 \quad \text{et} \quad 1530 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 17$$

Une fois ces décompositions effectuées, on remplace les résultats dans la fraction et on simplifie successivement jusqu'à obtenir la forme irréductible. Ainsi :

$$\frac{780}{1530} = \frac{2^2 \times 3 \times 5 \times 13}{2 \times 3^2 \times 5 \times 17} = \frac{2 \times 2 \times \cancel{3} \times \cancel{5} \times 13}{2 \times \cancel{3} \times 3 \times \cancel{5} \times 17} = \frac{2 \times 13}{3 \times 17} = \frac{26}{51}$$

Vidéos : Rendre une fraction irréductible

<https://www.youtube.com/watch?v=qZaTliAWkA0&list=PLVUDmbpupCarJc2-DNyRa54TsNpEEQGZT&index=10>

EXERCICE : Rendre une fraction irréductible

https://www.youtube.com/watch?v=pRO4I_miTY&list=PLVUDmbpupCarJc2-DNyRa54TsNpEEQGZT&index=11

EXERCICES – CHAPITRE 13

II) Décomposition en facteurs premiers

1) Effectuer la décomposition, p.17

5 Décompose chaque nombre en produit de deux facteurs premiers.

a. 51 =

b. 55 =

c. 58 =

d. 91 =

e. 106 =

f. 141 =

g. 205 =

h. 217 =

6 Décompose chaque nombre en produit de trois facteurs premiers.

a. 70 =

b. 354 =

c. 610 =

d. 1 065 =

8 Les décompositions ci-dessous sont exactes mais ne sont pas des décompositions en produit de facteurs premiers. Corrige-les et donne le résultat.

a. $2^2 \times 13 \times 26 =$

b. $3 \times 15 \times 97 =$

c. $7 \times 3^2 \times 9 \times 21 =$

d. $23 \times 25 \times 25 =$

e. $14 \times 7^2 \times 61 =$

9 Décompose chaque nombre en produit de facteurs premiers.

a. 292 =

b. 425 =

c. 473 =

d. 740 =

e. 873 =

f. 1 900 =

2) Application à la simplification de fractions, p.23

5 Utilise les décompositions en produit de facteurs premiers ci-dessous pour simplifier les fractions quand c'est possible.

$56 = 2^3 \times 7$

$1\,225 = 7^2 \times 5^2$

$1\,484 = 7 \times 2^2 \times 53$

$1\,805 = 19^2 \times 5$

$2\,385 = 5 \times 53 \times 3^2$

$8\,379 = 3^2 \times 19 \times 7^2$



a. $\frac{56}{1\,484} =$

b. $\frac{1\,484}{2\,385} =$

c. $\frac{8\,379}{1\,805} =$

d. $\frac{1\,225}{56} =$

e. $\frac{2\,385}{8\,379} =$

f. $\frac{1\,805}{56} =$

6 Décompose les nombres ci-dessous en produit de facteurs premiers, puis simplifie les fractions.

63 =

105 =

135 =

140 =

207 =

1 225 =

a. $\frac{140}{135} =$

b. $\frac{135}{63} =$

c. $\frac{105}{135} =$

d. $\frac{1\,225}{105} =$

e. $\frac{63}{207} =$

f. $\frac{1\,225}{140} =$