Un anniversaire commun

Maxime KIENTZ

12 novembre 2017

Dans ce billet nous allons nous pencher sur un groupe de personnes et étudier la possibilité que deux personnes soient nées le même jour au sein de ce groupe, indépendemment de l'année de naissance. Évidemment, on conçoit bien que c'est le nombre de personnes du groupe qui influence ce résultat, mais l'effectif minimal nécessaire pour atteindre une certitude de 99% est bien souvent sur-estimé. A votre avis, faut-il 30 personnes ? 100 ? 300 ? Découvrons-le ensemble...

Prérequis : *Dénombrement, Probabilités élémentaires*
Niveau : *Première S*

1 Observations préliminaires, définition des outils

Tout d'abord, considérons un groupe de N personnes. Cherchons à encadrer N très facilement. Pour que deux personnes soient nées le même jour, il faut que le groupe soit constitué d'au moins deux personnes. Aussi, on fera la considération que l'année de naissance de chaque individu n'est pas bissextile. Ainsi il y a 365 jours de naissance possibles, ce qui implique que dans un groupe de 366 personnes ou plus, nous sommes sûrs que l'événement se réalise. On étudiera alors un groupe de N personnes où N est en entier compris entre 2 et 365 inclus. On notera $N \in [\![2; 365]\!]$.

Pour des raisons de simplification de notation, et aussi pour la culture, donnons la définition suivante :

Définition : Soit n un nombre entier positif. On appelle *factorielle* n et on note $n!$ le résultat du produit de tous les nombres entiers compris entre 1 et n. Ainsi : $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 2 \times 1$

Exemple : $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$, $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$. Aussi, on peut remarquer que $210 = 7 \times 6 \times 5 = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \dfrac{7!}{4!}$.

Remarque : Par convention, on définit que $0! = 1$

Aussi, comme la probabilité que deux personnes soient nées le même jour dépend de la valeur de N, on définira $P(N)$ comme étant la probabilité que l'évènement se réalise dans un groupe de N personnes. Ainsi $P(35)$ s'interprète comme la probabilité que deux personnes soient nées le même jour dans un groupe de 35 personnes, soit environ une classe de lycée.

La clé de cette démonstration consistera à se demander quelle est la probabilité qu'aucune paire de personnes ne soient nés le même jour. L'événement considéré au départ est l'événement contraire de ce dernier, qui est bien plus simple à déterminer. Dans notre cas, cette probabilité sera notée $\bar{P}(N)$ et vérifie évidemment la relation $\bar{P}(N) = 1 - P(N)$.

2 Dénombrement, évaluation de la probabilité

2.1 Un exemple

On supposera tout d'abord que les dates d'anniversaires sont indépendantes les unes des autres dans ce groupe de personnes, et que chaque date a autant de possibilité d'apparaître qu'une autre (ce qui peut se discuter...).

Comme annoncé précédemment, on s'intéresse à la probabilité que toutes les personnes soient nées à une date différente. Afin de réaliser cet événement, chaque personne dans la pièce dispose d'une possibilité de date en moins par rapport à la précédente, en partant des 365 dates possibles au départ. Ainsi pour un groupe de 3 personnes la première personne possède 365 dates au choix, la deuxième en possède 364 (à savoir toutes les dates sauf celle de la première personne) et la troisième en a 363 (toutes sauf celles des deux autres personnes). Evidemment, tout ceci s'étend à un groupe de N personnes. Le tout est donc d'évaluer cette possibilité.

2.2 Démonstration par le dénombrement

En reprenant l'exemple du groupe de 3 personnes, la première possède 365 choix sur les 365 dates possibles, puis la deuxième en a 364 sur les 365, et finalement la dernière en a 363 sur les 365 possibles. On peut alors établir que :

$$\bar{P}(3) = \frac{365}{365}.\frac{364}{365}.\frac{363}{365} \approx 0.9918$$

Ceci signifie que dans un groupe de 3 personnes, la probabilité que deux personnes soient nées le même jour est environ de $P(3) = 1 - \bar{P}(3) \approx 0.0082$

Ceci peut se généraliser pour un groupe de N personnes où $N \in [\![2;365]\!]$. On a :

$$\bar{P}(N) = \overbrace{\frac{365}{365}.\frac{364}{365}.\frac{363}{365}...\frac{365-N+1}{365}}^{N facteurs} = \frac{1}{365^N}.(365 \times 364 \times ... \times (365-N+1)) = \frac{1}{365^N}.\frac{365!}{(365-N)!}$$

En gardant à l'esprit que ceci est la probabilité de l'évènement contraire, on obtient finalement que :

$$P(N) = 1 - \frac{1}{365^N}.\frac{365!}{(365-N)!}$$

A l'aide d'outils informatiques, il ne nous reste plus qu'à évaluer cette probabilité pour différentes valeurs de $N \in [\![2;365]\!]$ et d'en tirer des conclusions.

3 Résultats, interprétations

En passant par un logiciel de calcul formel relativement puissant, on arrive à réaliser le graphique suivant :

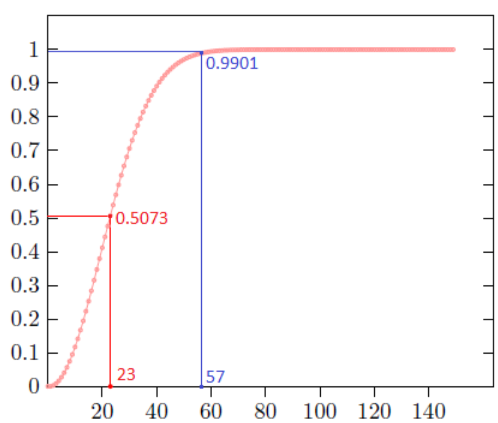

FIGURE 1 – Probabilité que l'événement se réalise en fonction du nombre de personnes

On peut noter quelques valeurs remarquables ! En effet, l'éventualité que deux personnes soient nées le même jour est supérieure à 50% dés que l'effectif du groupe dépasse 23 personnes, et devient supérieure à 99% dés que l'effectif du groupe dépasse 57 personnes ! Ces résultats semblent aberrants au premier abord, vu leur faible valeur, mais sont bien réels.

Pour déterminer une valeur approchée de cette probabilité en fonction d'un nombre donné de personnes, je vous invite à rejoindre le simulateur se trouvant à l'adresse $http : //www.dcode.fr/probabilites - anniversaire$. Vous pourrez par exemple simuler le cas de votre classe et obtenir la probabilité correspondante, puis observer si oui ou non deux personnes partagent leur jour d'anniversaire.

Évidemment, tout ceci n'est que probabilité théorique, donc rien ne vous garantit de trouver deux personnes partageant leur anniversaire dans un groupe donné. Quelques exemples à titres d'illustration.

Exemples :
- Parmi les 25 présidents de la république Française (de la I^{ere} à la V^{eme}), aucun n'est né le même jour qu'un autre.
- Parmi les 29 rois de France, deux sont nés le 27 juin : Charles IX et Louis XII.
- Parmi les 32 rois d'Angleterre, aucun n'est né le même jour qu'un autre.
- Tout groupe de personnes, peu importe son effectif, contenant des jumeaux ou jumelles voit cet événement se réaliser.

"*Quand on a vingt ans, on pense avoir résolu l'énigme du monde ; à trente ans, on commence à réfléchir sur elle et à quarante, on découvre qu'elle est insoluble.*" - August STRINDBERG