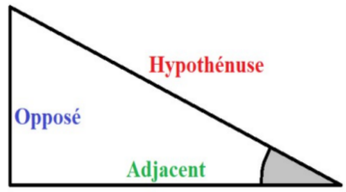
CHAPITRE 16 – COSINUS DANS UN TRIANGLE

I) Vocabulaire et propriétés

1) Préambule

Ce chapitre va introduire l'une des trois valeurs que nous allons utiliser en classe de 3e dans le cadre de la trigonométrie : le cosinus, le sinus, et la tangente. Ce premier chapitre en 4e fait office de découverte de l'une d'entre-elle, le cosinus, ce qui facilitera le travail en 3e sur les deux autres.

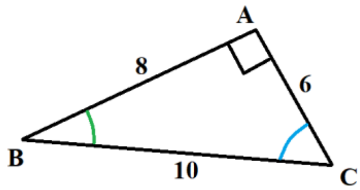
2) Cosinus dans un triangle rectangle



Toute cette partie se déroulera dans un triangle rectangle, tout comme pour le théorème de Pythagore. Pour un angle donné dans un triangle rectangle, différent de l'angle droit, on nomme les côtés ainsi :

Définition : Dans un triangle rectangle ABC, le cosinus d'un angle est égale au quotient $\frac{\textit{côté adjacent}}{\textit{hypothénuse}}$. Si l'angle se nomme $\widehat{ABC}$, alors on le note $\cos(\widehat{ABC})$.

Propriété : Le cosinus d'un angle aigu est un nombre sans unité compris entre 0 et 1.

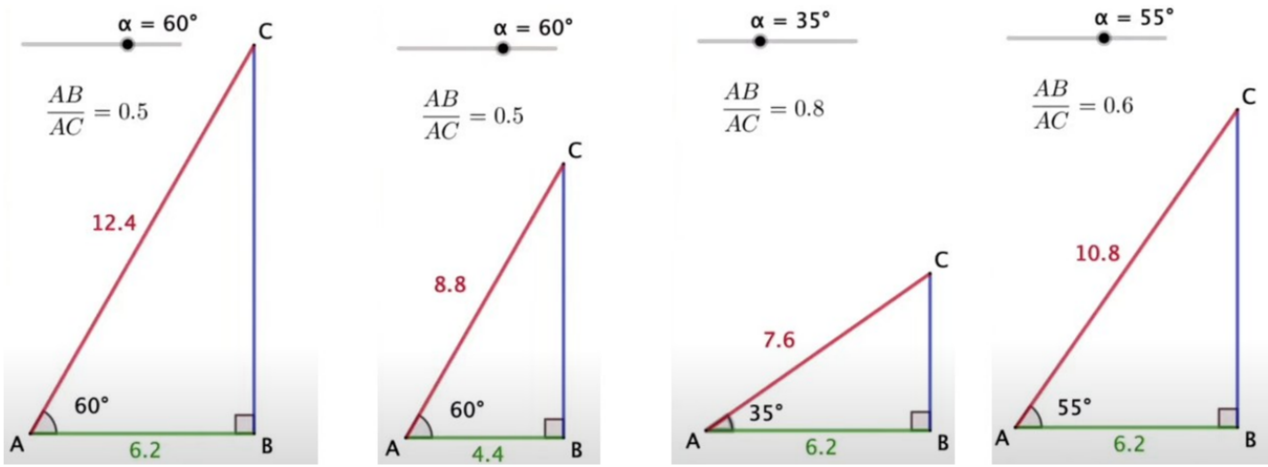


Exemple : ABC est un triangle rectangle tel que AC = 6cm, AB = 8cm et BC = 10cm. Observons les angles en B et C. On peut alors affirmer que

$\cos(\widehat{ABC})=\frac{8}{10}=0{,}8$ et $\cos(\widehat{ACB})=\frac{6}{10}=0{,}6$

(*Bonus : on peut démontrer que ce triangle est rectangle avec la réciproque du th. de Pythagore*)

On constate que la valeur est uniquement dépendante de l'angle, mais que pour la calculer, on utilise des longueurs de côtés. Il y a bien un lien entre ces deux mesures. Voici une liste de cas pour vous montrer que le cosinus d'un angle ne dépend que de la valeur de l'angle et non des mesures des côtés utilisés (Issus du cours sur le cosinus de Yvan MONKA, le lien du cours figure plus loin) :



On part d'un triangle rectangle en B dont on va étudier le cosinus de l'angle A. La première image sert de témoin. Dans la seconde, on voit bien qu'en réduisant la longueur du côté [AB] mais en préservant l'angle droit, le côté [AC] va se modifier en conséquence mais le rapport, et donc le cosinus, restera le même. Ce n'est plus le cas si on conserve [AB] mais que l'on modifie [BC], changeant l'angle, la mesure de l'hypothénuse, et donc la valeur du cosinus.

II) Utilisation de la calculatrice

Comme on a vu que le cosinus était indépendant des mesures des côtés mais uniquement dépendant de l'angle, ceci signifie qu'on peut directement lui donner un angle pour trouver sa valeur.

Que ce soit sur Casio ou sur T.I. il existe une touche prédéfinie pour calculer le cosinus d'un angle.Elle se nomme cos, comme la notation. On remarquera la présence de sin et tan, qui sont les touches pour le sinus et la tangente utiles en 3e, ainsi que des touches arcsin, arccos, arctan, dont on parlera plus tard.

On peut alors utiliser cette touche cos pour demander n'importe quelle valeur de cosinus à sa calculatrice.

Exemples : On trouve $\cos(60°) = 0{,}5$ $\cos(45°) = 0{,}707...$ $\cos(18°) = 0{,}951...$

III) Applications du cosinus

Tout comme le théorème de Pythagore, le cosinus va nous permettre de déterminer une mesure à partir de deux autres.

1) Déterminer la mesure d'un côté

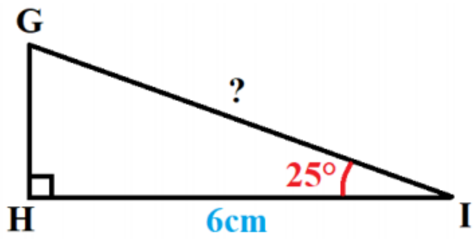
Dans ce premier cas, on suppose que l'on connaît un côté de l'angle, ainsi que la mesure de l'angle. On sera en mesure de trouver la mesure de l'autre côté avec la relation $\cos(angle)=\dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}}$.

Exemple : On considère ce triangle GHI rectangle en H dont le côté HI mesure 6cm et dont l'angle en I a une mesure de 25°. Écrivons la relation du cosinus sur cet angle :

$\cos(\widehat{GIH})=\dfrac{HI}{GI}$ donc ici $\cos(25°)=\dfrac{6}{GI}$

En manipulant cette égalité, on peut alors obtenir que

$$GI=\frac{6}{\cos(25°)}\approx 6{,}62\ldots$$



Remarque : si on avait connu le côté GI et voulu HI, on aurait eu la relation $HI=GI\times\cos(25°)$

2) Déterminer un angle

Dans ce second cas, on connaît la mesure des deux côtés de l'angle. On est donc en mesure de calculer la valeur du cosinus de cet angle. A partir de cette valeur, on pourra alors utiliser la touche arccos de la calculatrice pour retrouver à quel angle correspond une telle valeur de cosinus (cos et arccos sont réciproques l'un de l'autre)

Exemple : On considère ce triangle DEF rectangle en D dont le côté DF mesure 7cm et dont le côté EF mesure 9cm. On peut alors déterminer la valeur du cosinus de l'angle en F. On a $\cos(\widehat{DFE})=\dfrac{7}{9}$. Maintenant que l'on connaît cette valeur et on utiliser la touche arccos pour « remonter le processus » et trouver l'angle qui permet d'obtenir cette valeur de cosinus.

On a alors $\widehat{DFE}=\arccos(\dfrac{7}{9})=38{,}942\ldots\approx 39°$