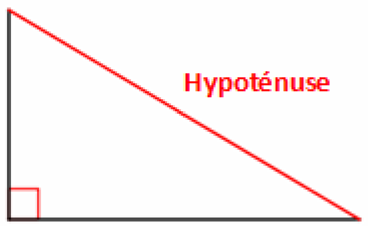
CHAPITRE 2 – THÉORÈME DE PYTHAGORE

I) Généralités

1) Vocabulaire



Définition : Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit est appelé *l'hypothénuse*.

Remarque : L'hypothénuse est le côté le plus long du triangle.

2) La racine carrée

Rappel : Mettre un nombre "*au carré*", c'est le multiplier par lui-même. Par exemple $3^2 = 3 \times 3 = 9$. Pour une longueur AB donnée, $AB^2 = AB \times AB$. Attention, ne pas confondre "au carré" et la multiplication par 2. Ainsi $AB^2 \neq AB \times 2$ et $5^2 = 5 \times 5 = 25$ mais pas $5 \times 2 = 10$.

Définition : Soit *a* un nombre positif. La *racine carrée de a* est le nombre positif dont le carré vaut *a*. Ce nombre est noté $\sqrt{a}$.

Exemple : $2^2 = 4$ donc $\sqrt{4}=2$ $3^2 = 9$ donc $\sqrt{9}=3$ $5^2 = 25$ donc $\sqrt{25}=5$

Remarques : • Souvent, la racine carrée d'un nombre entier n'est pas un nombre entier. Dans ce cas, on en donne une valeur approchée à la calculatrice. Par exemple, $\sqrt{17} \approx 4{,}12$.
• Attention car la racine carrée est positive, $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$ pourtant $\sqrt{4} \neq -2$.

Pour accélérer certains calculs, il sera demandé de connaître le tableau suivant par coeur. Il se lit ainsi : Si l'on met le nombre de la première ligne au carré, on obtient celui de la seconde ligne. Inversement, la racine carrée du nombre de la seconde ligne est égal au nombre de la première.

... au carré

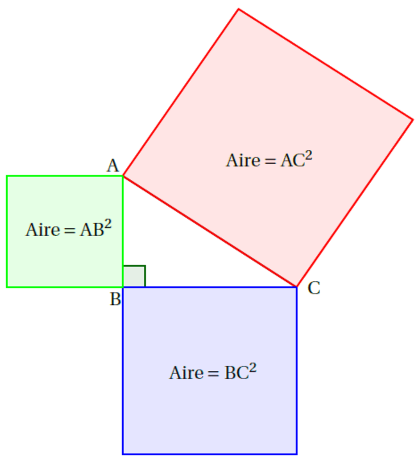
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144

racine de ...

Vidéos : Calculer une racine carrée
https://www.youtube.com/watch?v=2g67qQnGgrE&list=PLVUDmbpupCarYWm_GKXgPC-6d_kQK511w&index=3
Encadrer une racine carrée par deux entiers consécutifs
https://www.youtube.com/watch?v=bjS5LW-hgWk&list=PLVUDmbpupCarYWm_GKXgPC-6d_kQK511w&index=4

II) Le théorème de Pythagore

1) Le théorème, la rédaction



Théorème : Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.

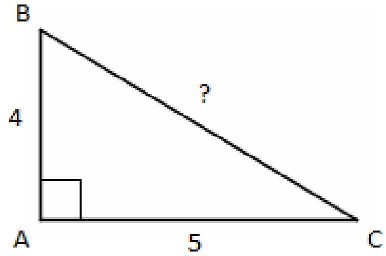
Exemple : On sait que le triangle ABC précédent est rectangle en B. Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a la relation : $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Ainsi, si nous avions par exemple des mesures pour AB et BC, on serait en mesure de déterminer la longueur AC.

Vidéos : Ecrire la formule de Pythagore
https://www.youtube.com/watch?v=_6ZjpAIWNkM&list=PLVUDmbpupCarYWm_GKXgPC-6d_kQK511w&index=2
Démonstration : Théorème de Pythagore (*expliquant pourquoi ça fonctionne !*)
https://www.youtube.com/watch?v=49OnlwASFbg&list=PLVUDmbpupCarYWm_GKXgPC-6d_kQK511w&index=11

2) Exemples d'application

***Exemple 1 :** Calculer la longueur de l'hypothénuse d'un triangle.*

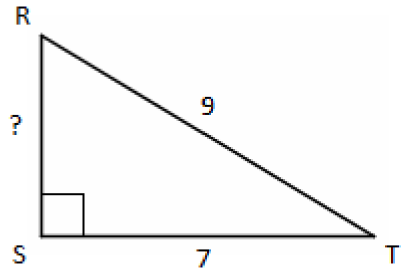
Rédaction : On sait que le triangle ABC est rectangle en A.
Donc d'après le théorème de Pythagore : $BC^2 = BA^2 + AC^2$
De ce fait : $AC^2 = 4^2 + 5^2$
=> $AC^2 = 16 + 25$
=> $AC^2 = 41$
Donc $AC = \sqrt{41} \approx 6{,}4\,cm$



Conclusion : On donnera une valeur approchée après avoir donné la valeur exacte.

***Exemple 2 :** Calculer la longueur d'un côté de l'angle droit (et donc pas de l'hypothénuse)*

Rédaction : On sait que le triangle RST est rectangle en S.
Donc d'après le théorème de Pythagore : $RT^2 = RS^2 + ST^2$
On cherche RS, donc on écrit $RS^2 = RT^2 - ST^2$
=> $RS^2 = 9^2 - 7^2$
=> $RS^2 = 81 - 49$
=> $RS^2 = 32$
Donc $RS = \sqrt{32} \approx 5{,}66\,cm$



Conclusion : La relation à établir est différente. Elle peut se résumer ainsi :
Coté inconnu² = Hypothénuse² – Côté connu²
Dans l'exemple précédent, on voulait déterminer RS, l'hypothénuse était RT, et on connaissait ST...

Vidéos : Appliquer le théorème de Pythagore pour calculer une longueur (1)
https://www.youtube.com/watch?v=M9sceJ8gzNc&list=PLVUDmbpupCarYWm_GKXgPC-6d_kQK511w&index=5
Appliquer le théorème de Pythagore pour calculer une longueur (2)
https://www.youtube.com/watch?v=9CIh6GGVu_w&list=PLVUDmbpupCarYWm_GKXgPC-6d_kQK511w&index=6
Résoudre un problème à l'aide du théorème de Pythagore
https://www.youtube.com/watch?v=gBuzFW_GlGc&list=PLVUDmbpupCarYWm_GKXgPC-6d_kQK511w&index=7

III) Réciproque du théorème

Sans vouloir rentrer dans les détails (car tout ceci est hors-programme !), étudier la réciproque d'une affirmation signifie "retourner" cette affirmation dans l'autre sens et observer si elle est vraie.

Un exemple concret : Admettons que "*S'il pleut, alors je prends mon parapluie*" est une affirmation vraie. Elle est constituée d'un élément *A : "Il pleut"* et d'un élément *B : "Je prends le parapluie"*. On peut résumer notre affirmation par "*Si A, alors B*".

Prendre la réciproque de notre affirmation revient alors à écrire "*Si B, alors A*", donc "*Si je prends mon parapluie, alors il se met à pleuvoir*". Cette réciproque est fausse : attraper votre parapluie ne ferra pas tomber la pluie...

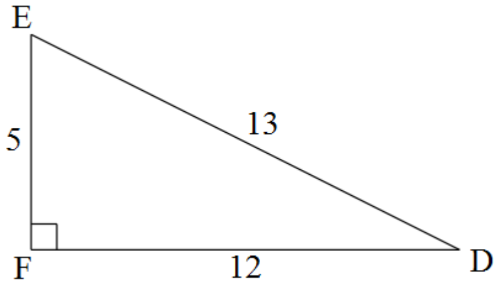
En mathématiques, il existe aussi des propriétés qui sont vraies dans un sens mais pas dans l'autre. En voici quelques exemples :

- Si un triangle est équilatéral alors il possède un angle de 60°, mais un triangle possédant un angle de 60° n'est pas forcément équilatéral.
- Un carré possède quatre angles droits, mais une figure possédant quatre angles droits n'est pas nécessairement un carré (ce peut être un rectangle...)

Evidemment, il en existe aussi certaines qui sont vraies dans les deux sens, et fort heureusement pour nous, le théorème de Pythagore en fait partie. On peut donc énoncer sa réciproque :

Théorème : *(Réciproque du théorème de Pythagore)* Dans un triangle, si le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

Exemple : On considère le triangle DEF tel que $DE = 13cm$, $DF = 12cm$ et $EF = 5cm$. Ce triangle est-il rectangle ?



Rédaction : Si le triangle DEF est rectangle en F, alors l'égalité suivante doit être vérifiée :

$$DE^2 = DF^2 + FE^2$$

D'une part : $DE^2 = 13^2 = 169$

D'autre part : $DF^2 + FE^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$

Comme $DE^2 = DF^2 + FE^2$, alors d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle DEF est rectangle en F.

Remarques :

- Pour déterminer en quel sommet le triangle a ses chances d'être rectangle, il faut d'abord repérer l'hypothénuse parmi les côtés. Le sommet en question est celui manquant dans l'écriture de ce côté. Par exemple, ici l'hypothénuse de DEF est DE, donc si le triangle a des chances d'être rectangle, c'est en F.
- Evidemment, si l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée, alors le triangle ne sera pas rectangle...

Vidéos : Comprendre la notion de réciproque
https://www.youtube.com/watch?v=qyufGYkzie8&list=PLVUDmbpupCarYWm_GKXgPC-6d_kQK511w&index=14
Appliquer l'égalité de Pythagore pour vérifier si un triangle est rectangle (1)
https://www.youtube.com/watch?v=puXyHcU5Awg&list=PLVUDmbpupCarYWm_GKXgPC-6d_kQK511w&index=10
Appliquer l'égalité de Pythagore pour vérifier si un triangle est rectangle (2)
https://www.youtube.com/watch?v=8vexpFayTbI&list=PLVUDmbpupCarYWm_GKXgPC-6d_kQK511w&index=10
Valeur exacte *VS* Valeur approchée
https://www.youtube.com/watch?v=zAOI5sUGmNo&list=PLVUDmbpupCarYWm_GKXgPC-6d_kQK511w&index=15

EXERCICES - CHAPITRE 2

I) Généralités

1) Vocabulaire

Associés plus tard dans la fiche II)1)

2) La racine carrée

1 Calcule mentalement.

a. $7^2 =$ ....

b. $9^2 =$ ....

c. $1^2 =$ ....

d. $8^2 =$ ....

2 Complète.

a. $\ldots\ldots^2 = 100$

b. $\ldots\ldots^2 = 36$

c. $\ldots\ldots^2 = 144$

d. $\ldots\ldots^2 = 16$

3 Calcule mentalement.

a. $\sqrt{121} =$ ....

b. $\sqrt{25} =$ ....

c. $\sqrt{4} =$ ....

d. $\sqrt{169} =$ ....

4 Complète.

a. $\sqrt{\ldots\ldots} = 3$

b. $\sqrt{\ldots\ldots} = 6$

c. $\sqrt{\ldots\ldots} = 4$

d. $\sqrt{\ldots\ldots} = 12$

5 Complète les tableaux en utilisant judicieusement les touches $\sqrt{x}$ et x^2 de ta calculatrice.

a	0,81	1,21	2,25	12,96	289	4 774,81	9 604	40 000
$\sqrt{a}$								

a								
$\sqrt{a}$	0,4	1,6	2,25	14	19	30,9	42,7	101

6 Donne la valeur de chaque nombre, arrondie au centième.

	$\sqrt{0,6}$	$\sqrt{1,11}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3,4}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{15}$	$\sqrt{28,86}$	$\sqrt{130,8}$
Valeur								

7 Calcule en utilisant les touches $\sqrt{x}$ ou x^2 de ta calculatrice. Toutes les longueurs sont en cm.

a. AB = 4,2

donc $AB^2 =$ ....

b. CD = 7,5

donc $CD^2 =$ ....

c. EF = 24

donc $EF^2 =$ ....

d. GH = 8,3

donc $GH^2 =$ ....

e. JK = 8,4

donc $JK^2 =$ ....

f. $LM^2 = 324$

donc LM = ...

g. $NP^2 = 0,49$

donc NP = ...

h. $RS^2 = 400$

donc RS = ...

i. $TU^2 = 12,25$

donc TU = ...

j. $VW^2 = 961$

donc VW = ...

8 Même énoncé qu'à l'exercice précédent. Tu arrondiras éventuellement au dixième.

a. $BC^2 = 196$

donc BC = ...

b. DE = 0,8

donc $DE^2 =$ ....

c. $FG^2 = 7,29$

donc FG = ...

d. HJ = 6,7

donc $HJ^2 =$ ....

e. $KL^2 = 3$

donc KL ≈ ....

f. MN = 11,1

donc $MN^2 =$ ....

g. $PR^2 = 214$

donc PR ≈ ....

h. ST = 3,4

donc $ST^2 =$ ....

i. $UV^2 = 278,89$

donc UV = ...

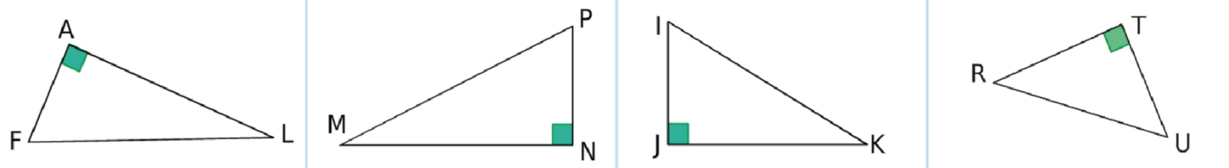
j. WX = 16

donc $WX^2 =$ ....

II) Le théorème de Pythagore

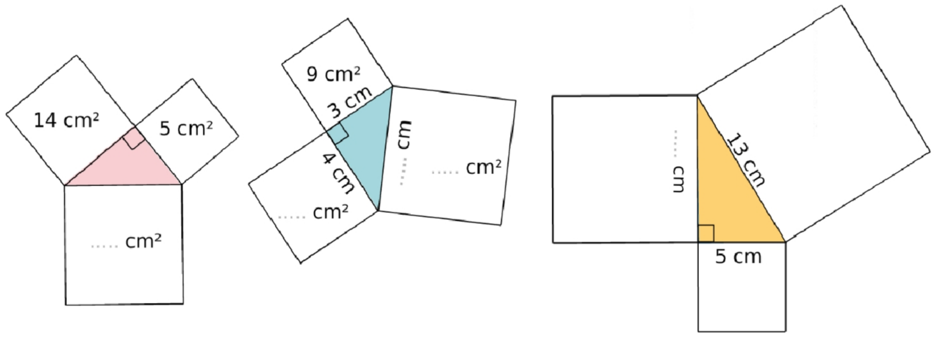
1) Le théorème, la rédaction

1 Pour chaque triangle, indique en quel point il est rectangle, quelle est son hypoténuse, puis écris l'égalité de Pythagore correspondante.

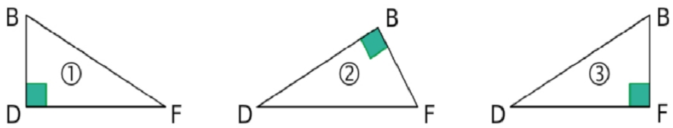


AFL est rectangle en ….. Son hypoténuse est ……	…………………………………… ……………………………………	…………………………………… ……………………………………	…………………………………… ……………………………………
FL^2 = …………………………			

5 Pour chaque figure, un carré est dessiné sur chaque côté du triangle rectangle.
Détermine la (les) mesure(s) manquante(s) : aire ou longueur.



1 Associe à chaque égalité de Pythagore le triangle rectangle correspondant.



$BD^2 = BF^2 + FD^2$ ⇨ triangle rectangle ……

$BF^2 = BD^2 + DF^2$ ⇨ triangle rectangle ……

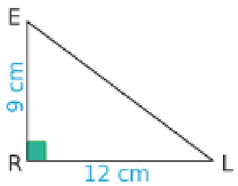
$DF^2 = DB^2 + BF^2$ ⇨ triangle rectangle ……

2) Exemples d'application

2 *Calcul de la longueur de l'hypoténuse*

ERL est un triangle rectangle en R,
tel que :
ER = 9 cm ;
RL = 12 cm.

Calcule la longueur EL.



……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

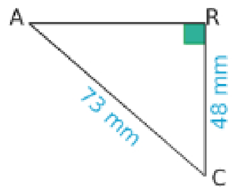
……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

4 *Calcul d'un côté de l'angle droit*

ARC est un triangle rectangle en R,
tel que :
AC = 73 mm ;
RC = 48 mm.

Calcule la longueur AR.



……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

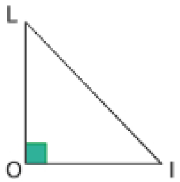
……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

3 *Calcul de la longueur de l'hypoténuse (bis)*

LOI est un triangle rectangle en O, tel que :
LO = 21 cm ;
OI = 20 cm.

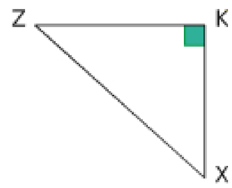
Calcule la longueur LI.



5 *Calcul d'un côté de l'angle droit (bis)*

KXZ est un triangle rectangle en K, tel que :
KX = 6,5 cm ;
ZX = 9,7 cm.

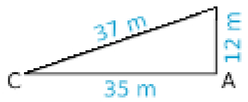
Calcule la longueur KZ.



III) Réciproque du théorème

1 *Démontrer qu'un triangle est rectangle*

Le triangle ABC est tel que :
AB = 12 m ; AC = 35 m ; et BC = 37 m.



a. Quel côté de ce triangle pourrait être l'hypoténuse ? Justifie.

b. Calcule puis compare BC^2 et $AB^2 + AC^2$.

Dans le triangle ABC, le plus long côté est ………… .

Donc on calcule séparément :

$BC^2 =$ …………… | ……… ^{2} + ……… ^{2} = …………

$BC^2 =$ …………… | …………………… = …………

| …………………… = …………

c. Conclus.

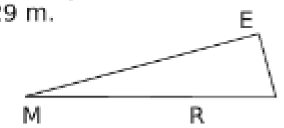
Donc, d'après ……………………………………………………

…………………………………………………………… ,

le triangle ABC ……………………………………………

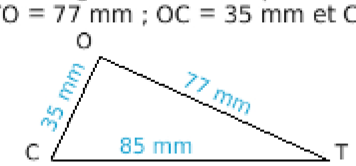
2 Soit MER un triangle tel que : ME = 2,21 m ER = 0,6 m et MR = 2,29 m.

Montre que le triangle MER est rectangle et précise en quel point.



3 *Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle*

Le triangle TOC est tel que :
TO = 77 mm ; OC = 35 mm et CT = 85 mm.



a. Quel côté de ce triangle pourrait être l'hypoténuse ? Justifie.

b. Calcule puis compare CT^2 et $CO^2 + OT^2$.

Dans le triangle TOC, le plus long côté est ………… .

Donc on calcule séparément :

$CT^2 =$ …………… | ……… ^{2} + ……… ^{2} = …………

$CT^2 =$ …………… | …………………… = …………

| …………………… = …………

c. Conclus.

4 Soit MNP un triangle tel que : MN = 9,6 cm ; MP = 4 cm et NP = 10,3 cm.

Montre que le triangle MNP n'est pas rectangle.