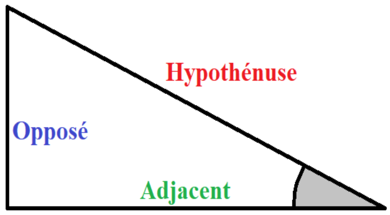
CHAPITRE 12 – TRIGONOMÉTRIE

I) Vocabulaire et propriétés



L'entièreté de ce chapitre n'est valide que dans un triangle rectangle.
Il existe des principes analogues pour des triangles non-rectangles, mais ils ne seront pas vus au collège.
On instaure les notions de vocabulaire suivantes : Pour un angle donné dans un triangle rectangle, on nomme les côtés ainsi :

Définition : Dans un triangle rectangle :

- Le *cosinus* d'un angle est égal au quotient $\dfrac{\textit{longueur du côté adjacent}}{\textit{longueur de l'hypothénuse}}$
- Le *sinus* d'un angle est égal au quotient $\dfrac{\textit{longueur du côté opposé}}{\textit{longueur de l'hypothénuse}}$
- La *tangente* d'un angle est égale au quotient $\dfrac{\textit{longueur du côté opposé}}{\textit{longueur du côté adjacent}}$

Moyen mnémotechnique : En ne prenant que les initiales de chacune des valeurs calculées ainsi que celes des côtés concernés, on obtient CAH-SOH-TOA (prononcer "*casse-toi*").

Propriété : Dans un triangle rectangle :
- Le cosinus d'un angle aigu est un nombre sans unité compris entre 0 et 1 ;
- Le sinus d'un angle aigu est un nombre sans unité compris entre 0 et 1 ;
- La tangente d'un angle aigu est un nombre positif sans unité.

Exemple : ABC est un triangle tel que AC = 6cm, AB = 8cm et BC = 10cm. Alors :

$$\cos \widehat{ABC}=\frac{AB}{BC}=\frac{6}{10}=0{,}6 \quad ; \quad \sin \widehat{ABC}=\frac{AC}{BC}=\frac{8}{10}=0{,}8 \quad ; \quad \tan \widehat{ABC}=\frac{AC}{BB}=\frac{6}{8}=0{,}75$$

Vidéo : Ecrire les formules de trigonométries
https://www.youtube.com/watch?v=XGnTdigL8fg&list=PLVUDmbpupCapiLam3_d5EqDSqAhh9f0Di&index=2

II) Utiliser sa calculatrice

La calculatrice est ici le seul outil nous permettant de déterminer des valeurs trigonométriques.

Méthode : Pour calculer le cosinus, le sinus, ou la tangente d'un angle, on utilise la touche [cos], [sin]ou [tan].

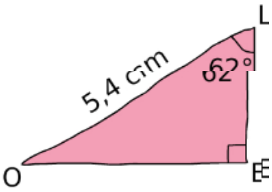
Exemple : $\cos(10°)\approx 0{,}98$, $\sin(20°)\approx 0{,}34$, $\tan(30°)\approx 0{,}58$.

Méthode : Pour calculer la mesure d'un angle à partir de la valeur du cosinus, du sinus, ou de la tangente on utilise la touche [$\cos^{-1}$] ou [arccos]; [$\sin^{-1}$] ou [arcsin]; [$\tan^{-1}$] ou [arctan].

Exemples : Soit x un angle tel que $\cos(x)=0{,}75$. Alors $x=\cos^{-1}(0{,}75)\approx 41°$.
Soit z un angle tel que $\tan(z)=52$. Alors $z=\tan^{-1}(52)\approx 89°$.

III) Utilisation des formules

1) Déterminer une longueur



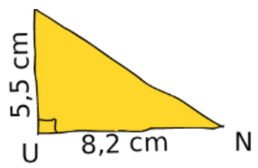
Exemple 1 : Dans le triangle LEO rectangle en E,
on connait la longueur LO et la mesure de l'angle $\widehat{ELO}$.
On veut calculer la longueur du segment [OE] puis celle du segment [EL].

$\sin \widehat{ELO} = \dfrac{\text{côté opposé à } \widehat{ELO}}{\text{hypoténuse}}$	⟶	On écrit le sinus de l'angle connu.
$\sin \widehat{ELO} = \dfrac{OE}{LO}$	⟶	La longueur cherchée OE doit apparaitre dans le rapport.
$OE = LO \times \sin \widehat{ELO}$	⟶	On applique la règle des produits en croix.
$OE = 5{,}4 \times \sin 62°$	⟶	On saisit 5,4 × SIN 62 à la calculatrice.
$OE \approx 4{,}8$ cm	⟶	OE est inférieure à LO. Le résultat est cohérent.

Vidéos : Calculer une longueur à l'aide de la trigonométrie (1)
https://www.youtube.com/watch?v=BscM5Iti3zI&list=PLVUDmbpupCapiLam3_d5EqDSqAhh9f0Di&index=5
Calculer une longueur à l'aide de la trigonométrie (2)
https://www.youtube.com/watch?v=FczJ1GvpD3w&list=PLVUDmbpupCapiLam3_d5EqDSqAhh9f0Di&index=6

2) Déterminer un angle

Exemple 2 :
Dans le triangle FUN rectangle en U,
on connait les longueurs FU et UN.
On veut calculer la mesure de l'angle $\widehat{UNF}$ arrondie au degré.



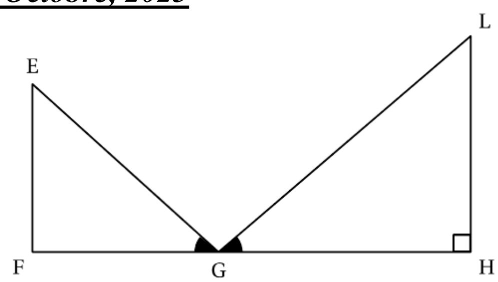
Dans le triangle FUN rectangle en U, [FU] est le côté opposé à l'angle $\widehat{UNF}$ [UN] est le côté adjacent à l'angle $\widehat{UNF}$	⟶	On cite les données de l'énoncé qui permettent de choisir la relation trigonométrique à utiliser. On doit utiliser la tangente de $\widehat{UNF}$.
$\tan \widehat{UNF} = \dfrac{\text{côté opposé à } \widehat{UNF}}{\text{côté adjacent à } \widehat{UNF}}$		
$\tan \widehat{UNF} = \dfrac{UF}{UN}$	⟶	On écrit la tangente de l'angle recherché.
$\tan \widehat{UNF} = \dfrac{5{,}5}{8{,}2}$	⟶	On saisit 2nde ou SHIFT puis TAN (5,5 ÷ 8,2) à la calculatrice.
$\widehat{UNF} \approx 34°$	⟶	On arrondit à l'unité.

Vidéos : Calculer un angle à l'aide de la trigonométrie (1)
https://www.youtube.com/watch?v=md7hgVVKVI0&list=PLVUDmbpupCapiLam3_d5EqDSqAhh9f0Di&index=3
Calculer un angle à l'aide de la trigonométrie (2)
https://www.youtube.com/watch?v=Cm9R1l0CSLo&list=PLVUDmbpupCapiLam3_d5EqDSqAhh9f0Di&index=4

Exemple : ***Extrait du sujet de brevet Amérique du Sud, Octobre, 2023***

On considère la figure suivante dans laquelle :
- F, G, H sont alignés
- (LH) et (FH) sont perpendiculaires
- EF = 18cm, FG = 24cm, EG = 30cm, GH = 38,4
- $\widehat{EGF} = \widehat{LGH}$

On admet que EFG est ractangle en F.



La figure n'est pas en vraie grandeur.

1) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{EGF}$ au degré près.
2) Montrer que les triangles EGF et LGH sont semblables.
3) Quel est le coefficient d'agrandissement qui permet de passer du triangle EFG au triangle LHG ?
4) Quel est le périmètre du triangle LGH ?

1) Comme EFG est rectangle, utilisons la trigonométrie :

$\cos(\widehat{EGF})=\frac{FG}{EG}=\frac{24}{30}=0{,}6$ donc $\widehat{EGF}=\cos^{-1}(0{,}6)\approx 53°$

2) On sait que $\widehat{EGF}$ = $\widehat{LGH}$ et on sait aussi que les deux triangles sont rectangles. Par conséquent, les angles restants sont égaux : $\widehat{FEG}$ = $\widehat{LHG}$. EGF et LGH sont donc deux triangles qui possèdent trois mesures d'angles deux à deux égales, ils sont semblables.

3) Les triangles sont semblables, donc leurs côtés sont proportionnels. Le coefficient s'obtient en divisant les mesures de deux côtés qui se correspondent, donc ici $k=\frac{GH}{FG}=\frac{38{,}4}{24}=1{,}6$.

4) Finalement, $P_{LHG}=1{,}6\times P_{EFG}=1{,}6\times(24+18+30)=1{,}6\times 72=136{,}8\,m$ par proportionnalité.

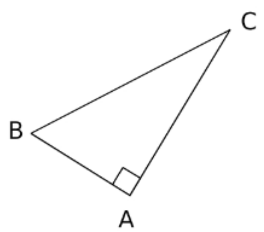
Vidéos : LE COURS - Trigonométrie
https://www.youtube.com/watch?v=DfgUYXB5_jg&list=PLVUDmbpupCapiLam3_d5EqDSqAhh9f0Di&index=1
QCM – La trigonométrie
https://www.youtube.com/watch?v=3qekCnGIJ_k&list=PLVUDmbpupCapiLam3_d5EqDSqAhh9f0Di&index=11
EXERCICE : Calculer un angle et une longueur avec la trigonométrie (1)
https://www.youtube.com/watch?v=4cWj2-ko6lQ&list=PLVUDmbpupCapiLam3_d5EqDSqAhh9f0Di&index=7
EXERCICE : Calculer un angle et une longueur avec la trigonométrie (2)
https://www.youtube.com/watch?v=EabJReafiSo&list=PLVUDmbpupCapiLam3_d5EqDSqAhh9f0Di&index=8
Résoudre un problème avec la trigonométrie (1)
https://www.youtube.com/watch?v=wX-ZieMMTSY&list=PLVUDmbpupCapiLam3_d5EqDSqAhh9f0Di&index=9
Résoudre un problème avec la trigonométrie (2)
https://www.youtube.com/watch?v=D-4bjtFjNkc&list=PLVUDmbpupCapiLam3_d5EqDSqAhh9f0Di&index=10

EXERCICES – CHAPITRE 12

I) Vocabulaire et propriétés, p.69

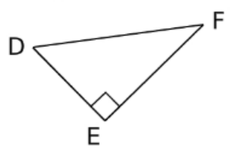
2 Dans chaque cas, complète les tableaux.

a. Soit un triangle ABC rectangle en A.



L'hypoténuse	
Côté adjacent à l'angle $\widehat{ABC}$	
Côté adjacent à l'angle $\widehat{ACB}$	

b. Soit DEF un triangle rectangle en E.



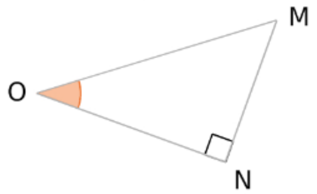
Côté opposé à l'angle $\widehat{EDF}$	
L'hypoténuse	
	[DE]

c. GHI est un triangle rectangle en H.

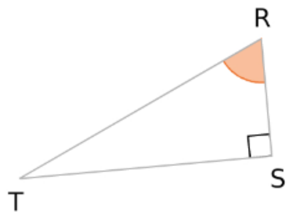
	[GH]
Côté adjacent à l'angle $\widehat{HIG}$	
	[IG]

1 Repasse en couleur les côtés demandés.

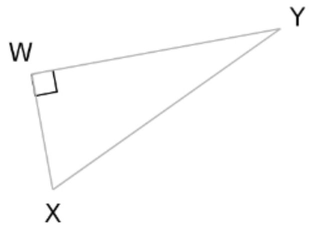
a. Le côté opposé à l'angle $\widehat{MON}$.



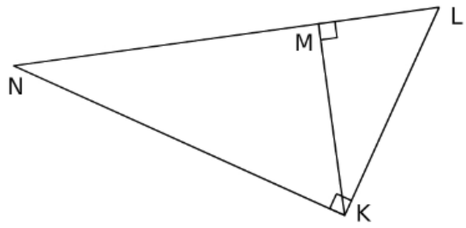
b. L'hypoténuse en rouge, et le côté opposé à l'angle $\widehat{SRT}$ en bleu.



c. L'hypoténuse en rouge, et le côté adjacent à l'angle $\widehat{WXY}$ en bleu.



4 On considère la figure suivante.



a. Dans le triangle NKL,
- l'hypoténuse est : ....
- le côté opposé à l'angle $\widehat{NLK}$ est : ....
- le côté adjacent à l'angle $\widehat{NLK}$ est : ....

b. Dans le triangle KMN,
- l'hypoténuse est : ....
- le côté opposé à l'angle $\widehat{MNK}$ est : ....

c. Dans le triangle KLM,
- l'hypoténuse est : ....
- le côté adjacent à l'angle $\widehat{LKM}$ est : ....

II) Utiliser sa calculatrice, p.70

1 À l'aide de la calculatrice, calcule les valeurs, arrondies au centième, du sinus et de la tangente des angles donnés.

Angle	20°	30°	45°	60°	83°
Sinus					
Tangente					

2 À l'aide de la calculatrice, calcule la valeur, arrondie au degré, de la mesure des angles.

a.

Sinus	0,32	0,4	0,9	1,2
Angle				

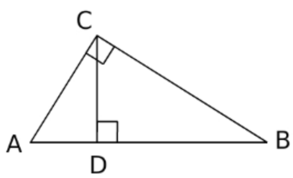
b.

Tangente	0,28	1,5	2,3	40
Angle				

III) Utilisation des formules, p71-72-73

1) Calculs de longueurs

4 À l'aide de la figure ci-contre, complète les phrases ci-dessous.



a. Dans le triangle ABC rectangle en C, on a :

cos $\widehat{BAC}$ = ... cos $\widehat{ABC}$ = ...

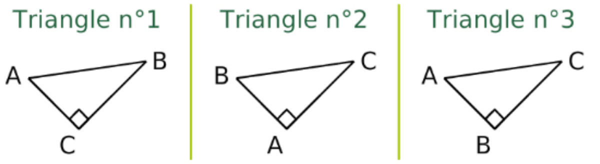
b. Dans le triangle BCD .... , on a :

sin $\widehat{BCD}$ = ... tan $\widehat{DBC}$ = ...

c. Dans le triangle ADC .... , on a :

sin $\widehat{ACD}$ = ...

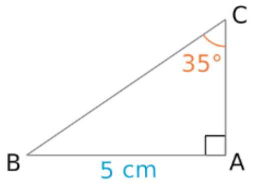
5 Complète le tableau avec le numéro du triangle qui convient.



		n°			n°
a.	$\cos \widehat{ABC} = \dfrac{AB}{BC}$		**c.**	$\sin \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AC}$	
b.	$\tan \widehat{ABC} = \dfrac{AC}{BC}$		**d.**	$\tan \widehat{BAC} = \dfrac{BC}{AC}$	

4 ABC est un triangle rectangle en A.
AB = 5 cm
et $\widehat{BCA} = 35°$.

On veut calculer la longueur BC.



a. Repasse, en rouge, le segment dont la longueur est connue et, en vert, celui dont la longueur est recherchée.
Quel rapport trigonométrique peux-tu utiliser ici ?

....

....

b. Écris l'égalité correspondante.

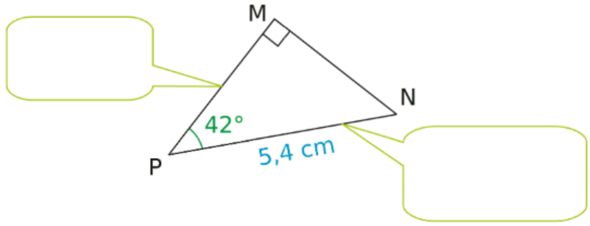
....

c. Calcule BC.

....

....

5 MNP est un triangle rectangle en M tel que PN = 5,4 cm et $\widehat{MPN} = 42°$.
On veut calculer la longueur MP.



a. Complète la légende, déduis-en le rapport que l'on peut utiliser, et écris l'égalité.

....

b. Calcule MP.

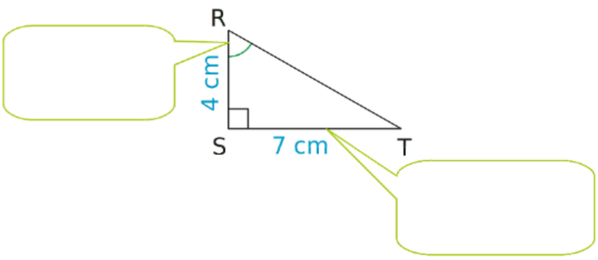
....

....

....

2) Calculs d'angles

6 RST est un triangle rectangle en S tel que RS = 4 cm et ST = 7 cm.
On veut calculer la mesure de l'angle $\widehat{SRT}$.



a. Complète la légende, déduis-en le rapport que l'on peut utiliser, et écris l'égalité.

....

....

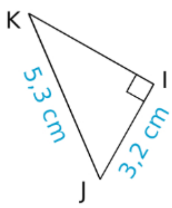
b. Calcule la mesure de l'angle $\widehat{SRT}$.

....

....

1 IJK est un triangle rectangle en I tel que IJ = 3,2 cm et JK = 5,3 cm.

Calcule la mesure de l'angle $\widehat{IKJ}$, arrondie au degré.



....

....

....

....

....

3 Pour effectuer une réparation sur un toit, Esteban doit poser son échelle contre un mur. Pour qu'elle soit suffisamment stable et qu'elle ne glisse pas, cette dernière doit former un angle d'au moins 65° avec le sol.

a. L'échelle mesure 2,20 m. Gêné par une jardinière de fleurs, Esteban n'a pu poser son échelle qu'à 1,20 m du mur.

Cette échelle sera-t-elle suffisamment stable ? Justifie.

....

....

b. À quelle distance maximum du mur doit-il placer son échelle pour qu'elle soit stable ?

....

....

....

....

....