CHAPITRE 9 – PUISSANCE D'UN NOMBRE

I) Puissance d'un nombre – Cas général

1) Calcul des puissances

Définition : Soit a un nombre relatif et n un entier positif. On note $a^n = a \times a \times \ldots \times a$ (n *fois*)
Le nombre a^n *se lit « a exposant n » ou « a puissance n ».*

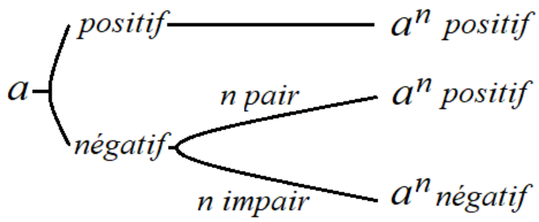
Remarque : $a^0 = 1$ par convention ; $a^1 = a$; $a^2 = a \times a$; $a^3 = a \times a \times a$
On peut donc enfin faire le lien entre « *au carré* » correspondant à la puissance 2, et « *au cube* » correspondant à la puissance 3 d'un nombre.

Exemples : $3^2 = 3 \times 3 = 9$ — *« 3 au carré » ou « 3 puissance 2 »*
$(-4)^3 = -4 \times (-4) \times (-4) = -64$ — *« -4 au cube » ou « -4 exposant 3 »*
$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ — *« 2 puissance 5 »*

Vidéo : Utiliser la notation de puissances
https://www.youtube.com/watch?v=jts9wiXPHtk&list=PLVUDmbpupCaqrE9JmRR9Law8aG-8yyJt-&index=2

2) Règles sur les puissances

A l'instar de la règle des signes, une petite propriété permet de déterminer le signe d'une puissance selon la valeur de a et de n. Elle s'énonce comme suit :



Propriété :
- Si a est positif, alors a^n est positif pour toute valeur de n.
- Si a est négatif, alors a^n est positif lorsque n est pair et est négatif lorsque n est impair.

Exemples : Pour le second cas, on a vu que $(-4)^3 = -4\times(-4)\times(-4) = -64$, mais $(-4)^2 = -4\times(-4) = 16$.

Mais que se passe-t-il si l'exposant en question était négatif ? En clair, que vaut par exemple 6^{-3} ?

Définition : Soit a un nombre relatif et n un entier positif. On note $a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a \times a \times \ldots \times a}$

Exemples : $6^{-3} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{6 \times 6 \times 6} = \frac{1}{216}$ $\qquad 4^{-1} = \frac{1}{4^1} = \frac{1}{4}$ $\qquad 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

Remarque :
- En particulier, pour tout nombre a, $a^{-1} = \frac{1}{a}$ comme illustré dans l'exemple du milieu.
- Sans rentrer dans les détails, la « *règle des signes* » présentée juste au-dessus tient toujours ici.

Vidéos : Calculer des puissances avec des nombres relatifs
https://www.youtube.com/watch?v=4CEYTrvUP0I&list=PLVUDmbpupCaqrE9JmRR9Law8aG-8yyJt-&index=3
Résoudre un problème à l'aide de puissances (1)
https://www.youtube.com/watch?v=4kwH1rM992Q&list=PLVUDmbpupCaqrE9JmRR9Law8aG-8yyJt-&index=4

II) Les puissances de 10

1) Particularité d'écriture

On va ici s'intéresser aux nombres de la forme 10^n et 10^{-n} où n est positif. Bien qu'elles se comportent de la même façon que les autres puissances, les puissances de 10 ont quelques avantages, notamment en terme d'écriture.

Propriété : Pour tout n entier positif, 10^n s'écrit $1\underbrace{0...0}_{n\ zéros}$; 10^{-n} s'écrit $\underbrace{0,0...0}_{n\ zéros}1$

Exemples : $10^0 = 1$; $10^3 = 1000$; $10^7 = 10000000$; $10^{-2} = 0,01$; $10^{-4} = 0,0001$

Vidéos :	Ecrire un nombre avec des puissances de 10
https://www.youtube.com/watch?v=D5Fe9Fv6CqQ&list=PLVUDmbpupCaqrE9JmRR9Law8aG-8yyJt-&index=5	
	Utiliser les puissances de 10 d'exposant négatif
https://www.youtube.com/watch?v=TSeL-rVZNPQ&list=PLVUDmbpupCaqrE9JmRR9Law8aG-8yyJt-&index=6	
	Ecrire sous forme décimale un nombre avec des puissances de 10
https://www.youtube.com/watch?v=vRPOgw3Sfnk&list=PLVUDmbpupCaqrE9JmRR9Law8aG-8yyJt-&index=7	

2) Une application : écriture scientifique, ordre de grandeur

Cette section s'appuie sur le résultat fondamental suivant :

Propriété : Tout nombre décimal non nul peut être écrit sous la forme $a \times 10^n$, où a est un nombre décimal ayant *un seul chiffre non nul pour partie entière* et où n est un nombre entier relatif.

Définition : L'écriture d'un nombre sous sa forme $a \times 10^n$ est appelée *l'écriture scientifique* du nombre. Le nombre a est appelé *mantisse* du nombre et n est son *ordre de grandeur*.

Exemples :
- $1254 = 1,254\times1000 = 1,254\times10^3$ 1,254 est la mantisse, et l'ordre de grandeur est 3.
- $476,23 = 4,7623\times100 = 4,7623\times10^2$ 4,7623 est la mantisse, et l'ordre de grandeur est 2
- $0,0000093 = 9,3\times0,000001 = 9,3\times10^{-6}$ 9,3 est la mantisse, et l'ordre de grandeur est -6

Méthode : Pour déterminer l'écriture scientifique d'un nombre.
- Extraire du nombre de départ le nombre décimal qui deviendra la mantisse.
- A partir de cette mantisse, déduire quelle multiplication permet de rejoindre le nombre de départ (10 ; 100 ; 1000 ou encore 0,1 ; 0,01 ; ...)
- Convertir ce facteur en une puissance de 10.

Exemple : Dans le premier cas ci-dessus 1254, appliquons cette méthode.
- On déduit de ce nombre le *décimal* qui servira de mantisse : $1254 \rightarrow \mathit{1,254}$
- On *trouve la multiplication* qui permet de rejoindre le nombre de départ à partir de cette mantisse : $1254 = 1,254\times\mathit{1000}$
- On *convertit 1000* en puissance de 10 : $1254 = 1,254\times\mathit{10^3}$

Avec cette notion d'ordre de grandeur s'accompagne une liste de préfixes permettant de désigner certains ordres de grandeurs, ainsi que leur abréviation. Voici le tableau :

Nano…	Micro...	Milli...	---	Kilo…	Méga…	Giga...
10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	1	10^{3}	10^{6}	10^{9}
n	μ	m	---	k	M	G

Exemples :

- 1254g correspond à $1{,}254\times10^{3}$ grammes, donc à 1,254 kilogrammes (abrégé kg)
- 0,0000093m correspond à $9{,}3\times10^{-6}$ mètres, donc à 9,3 micromètres (abrégé μm)
- La taille du Soleil est estimée à 1390000km, soit 1390000000m. Ceci correspond à $1{,}39\times10^{9}$m, donc à 1,39 Gigamètres (*abrégé Gm*)

On peut alors comparer deux grandeurs en observant simplement leurs ordres de grandeur. Ceci permet en un coup d'oeil de voir quelle quantité est la plus grande. Si les deux quantités ont le même ordre de grandeur, il suffit de comparer leurs mantisses.

Exemple :

Compare

- $A = 1{,}7 \times 10^{3}$ et $B = 2{,}5 \times 10^{2}$
- $C = 12{,}4 \times 10^{3}$ et $D = 3{,}1 \times 10^{4}$.

- L'ordre de grandeur de A est 10^{3} alors que B est de l'ordre de 10^{2}. Donc **A > B**.
- La notation scientifique de C est :
  $C = 1{,}24 \times 10 \times 10^{3} = 1{,}24 \times 10^{4}$.
  C et D ont le même ordre de grandeur.
  Or, 1,24 < 3,1 donc **C < D**.

Vidéos : Ecrire un nombre sous forme scientifique
https://www.youtube.com/watch?v=tzhNCpLRtCY&list=PLVUDmbpupCaqrE9JmRR9Law8aG-8yyJt-&index=8
Résoudre un problème à l'aide de puissances (2)
https://www.youtube.com/watch?v=RtstlSW1Jg0&list=PLVUDmbpupCaqrE9JmRR9Law8aG-8yyJt-&index=9
Utiliser l'écriture scientifique pour comparer des nombres
https://www.youtube.com/watch?v=YkTYhzFJEZs&list=PLVUDmbpupCaqrE9JmRR9Law8aG-8yyJt-&index=12
EXERCICE : Ecrire un nombre sous forme scientifique (1)
https://www.youtube.com/watch?v=W9ZjP-7jk50&list=PLVUDmbpupCaqrE9JmRR9Law8aG-8yyJt-&index=10
EXERCICE : Ecrire un nombre sous forme scientifique (2)
https://www.youtube.com/watch?v=0oOK8wCyXyc&list=PLVUDmbpupCaqrE9JmRR9Law8aG-8yyJt-&index=11
Calculer des puissances – notations scientifique – Tutoriel Casio
https://www.youtube.com/watch?v=xMR4hFMdTMY&list=PLVUDmbpupCaqrE9JmRR9Law8aG-8yyJt-&index=13
Calculer des puissances – notations scientifique – Tutoriel T.I.
https://www.youtube.com/watch?v=7eKVelM9lF8&list=PLVUDmbpupCaqrE9JmRR9Law8aG-8yyJt-&index=15

EXERCICES – CHAPITRE 9

I) Puissance d'un nombre, cas général, p.44

1 Écris chaque expression sous la forme d'une puissance d'un nombre.

a. $7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 =$ ....

b. $3 \times 3 \times 3 \times 3 =$ ....

c. $(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) =$ ....

d. $2{,}5 \times 2{,}5 \times 2{,}5 \times 2{,}5 \times 2{,}5 \times 2{,}5 =$ ....

e. $\left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) =$ ....

2 Écris chaque expression sous la forme d'un produit de facteurs.

a. $2^{7} =$ ....

b. $4^{5} =$ ....

c. $(-5)^{4} =$ ....

d. $(-1{,}2)^{3} =$ ....

e. $\left(\frac{3}{4}\right)^{5} =$ ....

3 Complète.

Puissance	Définition	Valeur
3^7		
9^2		
$(-2)^3$		
	$6 \times 6 \times 6 \times 6$	
	$(-1) \times (-1) \times (-1)$	
	$(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$	

5 Complète avec l'exposant correspondant.

a. $4\,096 = 4^{\cdots}$

b. $-216 = (-6)^{\cdots}$

c. $2\,401 = 7^{\cdots}$

d. $0{,}125 = 0{,}5^{\cdots}$

e. $1{,}61051 = 1{,}1^{\cdots}$

f. $10\,000\,000 = 10^{\cdots}$

6 **a.** Complète en donnant l'écriture décimale.

3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6

Issus du Manuel Sésamath 4e

5 Quels sont les nombres négatifs ?

a. $(-6)^4$ **d.** $(-12)^{15}$ **g.** $-(-35)^7$

b. 6^8 **e.** $(-3)^7$ **h.** -87^4

c. -132^{51} **f.** $(-3{,}6)^{100}$ **i.** $-(-13^8)$

12 Décompose puis donne l'écriture fractionnaire en calculant à la main.

a. 2^{-5} **c.** 4^{-3} **e.** $(-3)^{-4}$ **g.** $-1{,}1^{-3}$

b. 5^{-1} **d.** $0{,}1^{-2}$ **f.** -3^{-4} **h.** $(-20)^2$

11 Recopie et complète :

a. $12^{-5} = \dfrac{1}{12^{\cdots}}$

b. $7^{\cdots} = \dfrac{1}{7^5}$

c. $8^{-6} = \dfrac{1}{8^{\cdots}}$

d. $\dfrac{1}{9^{\cdots}} = 9^{-23}$

e. $\dfrac{1}{8^{\cdots}} = 8$

f. $\dfrac{1}{21^{\cdots}} = 21^{15}$

g. $1{,}5^2 = \dfrac{1}{1{,}5^{\cdots}}$

h. $(-7)^3 = \dfrac{1}{(-7)^{\cdots}}$

Pour aller plus loin :

13 Donne l'écriture décimale en calculant à la calculatrice.

a. 2^{-14} **b.** 17^{-3} **c.** 8^{-7} **d.** 3^{-10}

e. $(-11)^{-4}$ **f.** $(-1{,}2)^{-6}$ **g.** -4^{-10} **h.** $-0{,}6^{-7}$

II) Les puissances de 10, p.45

1 Complète.

Puissance	Définition	Écriture décimale
10^7		
10^2		
	$10 \times 10 \times 10 \times 10$	
		1 000 000
		100 000
10^3		

2 Complète.

Puissance	Définition	Écriture fractionnaire	Écriture décimale
10^{-3}	$\dfrac{1}{10^{\cdots}}$	$\dfrac{1}{\cdots\cdots\cdots\cdots}$	
10^{-2}			
	$\dfrac{1}{10^5}$		
			0,000 000 1
			0,1

8 Complète le tableau.

Puissance de 10	Préfixe	Symbole
	giga	
	méga	
	kilo	
	hecto	
	déca	
	déci	
	centi	
	milli	
	micro	
	nano	

9 Complète comme ci-dessous.

3 microlitres = 3×10^{-6} L

a. 7 mégahertz = ... Hz

b. 2 millisecondes = ... s

c. 5 gigawatts = ... W

d. 6 microvolts = ... V

1 Colorie les cases qui contiennent des nombres écrits en notation scientifique.

56×10^{-5}	$0{,}56 \times 10^{-1}$	3×10^{-7}
$8{,}7 \times 10^{12}$	10×10^{5}	5,98
0,97	$1{,}32 \times 10^{0}$	$3{,}14 \times 10^{4}$
$13{,}4 \times 10^{10}$	$8{,}71 \times 10^{-15}$	$9{,}9 \times 10^{1}$

2 Écris chaque nombre en notation scientifique.

a. 6 540 = ...

b. 34,3 = ...

c. 1 475,2 = ...

d. 23,45 = ...

e. 0,003 2 = ...

f. 0,001 = ...

5 Complète.

a. $1{,}45 \times 10^{\cdots} = 14\,500$

b. $0{,}071 \times 10^{\cdots} = 7{,}1$

c. $6{,}3 \times 10^{\cdots} = 6\,300$

d. $8\,500 \times 10^{\cdots} = 85$

e. $63 \times 10^{\cdots} = 0{,}063$

f. $45 \times 10^{\cdots} = 0{,}0045$

3 Relie les nombres égaux.

$271\,800 \times 10^{-6}$ •	• 0,027 18
$271{,}8 \times 10^{-2}$ •	• 0,271 8
$2\,718 \times 10^{-1}$ •	• 2,718
$0{,}271\,8 \times 10^{-1}$ •	• 27,18
$2\,718 \times 10^{0}$ •	• 271,8
$0{,}271\,8 \times 10^{3}$ •	• 2 718
$0{,}002\,718 \times 10^{4}$ •	• 27 180
$0{,}027\,18 \times 10^{7}$ •	• 271 800