Méthodes de multiplications

Maxime KIENTZ

30 décembre 2020

Voici quelques méthodes originales pour déterminer le résultat d'un produit de deux nombres selon certaines conditions. J'ai repris les méthodes recensées dans le livre de *Fabien OLICARD - Votre cerveau est définitivement extraordinaire*[1]. Il propose sous forme de trois petits chapitres trois méthodes pour réaliser simplement des multiplications de nombres à deux chiffres, qui sont intimement liées. Les méthodes y sont décrites mais sans réellement expliquer pourquoi cela fonctionne. C'est le thème d'aujourd'hui !

Prérequis : *Nombre au carré, Double distributivité pour les démonstrations.*
Niveau : *6ème pour l'application, 4ème pour les démonstrations.*

1 Ecriture d'un nombre dans une base

C'est la seule partie théorique ici. Pour les démonstrations, il sera nécessaire de comprendre comment on peut écrire un nombre à deux chiffres... sans utiliser de chiffres ! Vu que les démonstrations doivent être générales, et donc marcher pour n'importe quel nombre, il faudra s'acquitter de nos chers nombres pour laisser place à des lettres.

Par exemple, le nombre 96 est le nombre à deux chiffres écrits avec les chiffres 9 et 6. Cependant, si l'on veut parler de n'importe quel nombre à deux chiffres, il faut trouver un moyen d'écrire "*le nombre écrit avec les chiffres a et b*". On ne peut pas l'écrire ab car il s'agit de l'écriture du produit des nombres a et b, donc il faut trouver un autre moyen. Le moyen utilisé pour désigner ce nombre, c'est de l'écrire $\overline{ab}$ avec une barre dessus.

Sans rentrer dans la généralité et la théorie, cette notation désigne l'écriture d'un nombre dans une certaine base. Celle que nous utilisons au quotidien est la base 10 composée de nos dix chiffres, mais il existe toutes sortes de bases utiles. On mentionnera par exemple la base binaire très répandue en informatique, composée uniquement de 0 et 1, ou encore la base hexadécimale également cruciale en informatique, où l'on décide que 10, 11, 12, 13, 14, 15 sont des chiffres que l'on écrit alors A, B, C, D, E, F.

De tout ceci, on retiendra que $\overline{ab}$ est le nombre à deux chiffres écrits à l'aide des chiffres a et b. Mathématiquement, on a $\overline{ab} = a \times 10 + b$. On voit bien par exemple que ceci coincide avec 96, vu que $\overline{96} = 9 \times 10 + 6 = 96$.

2 Multiplier deux nombres entre 10 et 20

2.1 La méthode

Il existe une méthode pour réaliser plus simplement des produits tels que 13×15, 17×19, sans avoir à connaître les tables par cœur, et c'est celle que l'on va détailler ici. Prenons l'exemple 13×15 pour illustrer la méthode.

Identifier le plus petit nombre des deux, et considérer son unité	Ici 13, et son unité vaut 3
Soustraire ce chiffre des unités au plus petit nombre, et l'ajouter au grand	$13 - 3 = 10$ et $15 + 3 = 18$
Faire le produit des deux nombres obtenus	$10 \times 18 = 180$
Multiplier les unités des nombres de départs entre-elles	$3 \times 5 = 15$
Faire la somme des deux résultats précédents	$180 + 15 = 195$

On obtient donc que $13 \times 15 = 195$. A vous maintenant de la reproduire pour montrer que $17 \times 19 = 323$.

1. Fabien OLICARD - Votre cerveau est définitivement extraordinaire, 2018, éditions First

2.2 La preuve

Il est temps d'observer pourquoi ça marche. Déjà, mettons de côté la multiplication par 20, étant donné qu'elle ne consiste qu'à doubler l'autre nombre avant de le multiplier par 10. On s'intéresse donc aux multiplications de deux nombres allant de 10 à 19. Ces derniers nombres ont quelque chose en commun, ils possèdent tous un 1 comme chiffre des dizaines. De ce fait, avec l'écriture introduite au premier paragraphe, on s'intéresse à deux nombres $\overline{1a}$ et $\overline{1b}$, et plus particulièrement à la multiplication $\overline{1a} \times \overline{1b}$. Développons-là :

$$\overline{1a} \times \overline{1b} = (10 + a) \times (10 + b) = 100 + 10a + 10b + ab = 100 + 10(a + b) + ab$$

Si en appliquant la méthode de Fabien OLICARD, on arrive aussi à ce résultat, alors on aura démontré que ça fonctionne. Il procède en deux temps.

D'abord, quitte à les échanger, on considérera que c'est le nombre $\overline{1a}$ le plus petit des deux. Son chiffre des unités est a, donc la première étape de la méthode consiste à ajouter/retirer a aux nombres. On obtient $\overline{1a} - a = 10 + a - a = 10$ et $\overline{1b} + a = 10 + b + a$. Remarquez d'ailleurs que cette méthode fait toujours apparaître 10 après avoir soustrait l'unité gardée au plus petit nombre !

Ensuite, il multiplie ces deux nombres entre-eux et rajoute le produit des unités, à savoir ab. Il faut donc effectuer le calcul $10 \times (10 + a + b) + ab$. On obtient :

$$10 \times (10 + a + b) + ab = 10 \times 10 + 10a + 10b + ab = 100 + 10(a + b) + ab$$

C'est le résultat obtenu par distributivité juste avant, et ceci prouve bien que cette méthode permet de calculer la multiplication $\overline{1a} \times \overline{1b}$. $\square$

3 Mettre un nombre à deux chiffres au carré

3.1 La méthode

On rappelle que mettre un nombre au carré, c'est le multiplier par lui-même. On s'intéresse donc ici aux multiplications comme 34×34, 76×76, etc. Voici la méthode utilisée, en l'illustrant avec le premier exemple. Le nombre que l'on veut mettre au carré sera appelé N, donc ici $N = 34$.

Prendre la dizaine inférieure la plus proche du nombre, on l'appellera M	Ici pour 34, $M = 30$
Faire la différence du nombre et de cette dizaine, l'appeler D	$D = 34 - 30 = 4$
Mettre ce nombre D au carré	$D^2 = 4 \times 4 = 16$
Calculer $M \times (N + D)$	$30 \times (34 + 4) = 30 \times 38 = 1140$
Faire la somme des deux résultats précédents	$1140 + 16 = 1156$

On obtient donc que $34 \times 34 = 1156$. A vous de la reproduire pour montrer que $74 \times 74 = 5476$. Une remarque : la quatrième étape ne devrait pas poser de problème pour le calcul, vu que l'on multiplie un nombre par un multiple de 10. On peut donc par exemple découper 38×30 en $38 \times 3 \times 10 = 114 \times 10 = 1140$.

3.2 La preuve

Le calcul que l'on cherche à étudier est $\overline{ab} \times \overline{ab}$. Si on écrit l'expression mathématique correspondant au nombre et que l'on développe ce calcul, on obtient :

$$\overline{ab} \times \overline{ab} = (10a + b) \times (10a + b) = (10a)^2 + 10ab + 10ba + b^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$$

A nouveau, voyons le calcul effectué par la méthode et montrons que l'on parvient au même résultat. On a déjà $N = 10a + b$. On arrive facilement à comprendre que M est en vérité la différence de N et de son chiffre des unités, donc rapidement $M = 10a$. D est la différence de N et M, donc en vérité D n'est rien d'autre que le chiffre des unités du nombre de départ. Finalement $D = b$. Si l'on observe le calcul effectué par la méthode on obtient en une ligne $M \times (N + D) + D^2$. Avec nos observations :

$$M \times (N + D) + D^2 = 10a \times (10a + b + b) + b^2 = 10a \times (10a + 2b) + b^2 = (10a)^2 + 10a \times 2b + b^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$$

C'est à nouveau le résultat obtenu en distribuant, donc cette méthode permet bien de mettre un nombre à deux chiffres au carré. $\square$

Ces deux premières méthodes ne sont en réalité que des cas particuliers de la troisième et dernière méthode relatée dans le livre.

4 Multiplier deux nombres entre 10 et 100

4.1 La méthode

Ici, aucun lien ou restriction sur nos nombres à deux chiffres. Nous mettrons aussi de côté la multiplication par 100 car elle n'a rien de bien sorcier ! Cette méthode nous permet donc de calculer 19×43, 81×73, etc. Voyons comment elle s'applique, cette fois-ci sur le deuxième exemple :

Multiplier dizaines, puis unités, entre-elles, écrire le résultat avec deux chiffres	$8 \times 7 = 56$, $1 \times 3 = 03$
Accoler les deux résultats obtenus, dans le sens dizaines puis unités	56 et 03 donnent 5603
Faire chaque multiplication "croisée" entre unité d'un nombre et dizaine de l'autre	$8 \times 3 = 24$, $1 \times 7 = 7$
Faire la somme des deux résultats précédents	$24 + 7 = 31$
Multiplier ce résultat par 10 et l'ajouter au nombre de l'étape 2	$31 \times 10 + 5603 = 5913$

Et bingo ! $81 \times 73 = 5913$. Une dernière fois, à vous de l'utiliser pour démontrer que $19 \times 43 = 817$.

4.2 La preuve

Une dernière preuve pour conclure ce papier. Cette fois-ci, comme les deux nombres n'ont aucun lien entre-eux, on s'intéresse aux multiplications $\overline{ab} \times \overline{cd}$. Développons :

$$\overline{ab} \times \overline{cd} = (10a + b) \times (10c + d) = 100ac + 10ad + 10bc + bd = 100ac + 10(ad + bc) + bd$$

Analysons maintenant les étapes de la méthode. La première étape nous demande de multiplier les dizaines entre-elles et les unités entre-elles. Faire ceci revient à calculer ac et bd. Une fois ceci effectué, on nous demande d'accoler ces deux morceaux. "*Accoler*" est un terme mathématiquement maladroit, mais on peut s'en sortir assez simplement : dans notre nombre-résultat à l'étape 2, on voit que ac est le nombre qui occupera la place des milliers et des centaines. Le chiffre des unités de ac devient le chiffre des centaines du résultat, ceci correspond mathématiquement à une multiplication par 100. En fait, cette étape nous fait calculer $100ac + bd$

Dans la seconde partie de la méthode, on nous demande d'effectuer des multiplications croisées. Ce sont donc les produits ad et bc qui nous intéressent. Leur somme $ac+bd$ est ensuite multipliée par 10, ce qui nous donne $10(ac+bd)$.

Finalement, on additionne les deux morceaux obtenus indépendamment, ce qui va automatiquement nous redonner le résultat obtenu en développant :

$$100ac + bd + 10(ad + bc) = 100ac + 10(ad + bc) + bd$$

Et voilà, vous avez maintenant toutes les cartes en main pour effectuer toutes les multiplications de deux nombres de 1 à 100, ce qui représente par moins de 10201 opérations à votre portée de main (*je vous laisse la preuve de ce résultat en exercice !*). $\square$

Remarque : La première méthode est bien un cas particulier de celle-ci en posant que le chiffre des dizaines de chaque nombre, donc a et c, valent 1. Le second cas n'est autre que cette méthode appliquée lorsque $\overline{ab} = \overline{cd}$, c'est à dire lorsque $a = c$ et $b = d$.

"*Quand on me dit : «Je n'ai pas de mémoire», je réponds toujours «Si, il vous manque juste le mode d'emploi»*"
— Fabien OLICARD