Quelques démonstrations de variations

Maxime KIENTZ

20 mai 2018

Il arrive que lors de certains cours d'analyse (comprendre "*étude de fonction*" majoritairement), on vous annonce que telle ou telle fonction est croissante ou décroissante sur tel ou tel intervalle. Bien souvent, la justification se limite à l'observation de la représentation graphique permettant de valider la propriété énoncée. Je décide ici de donner la démonstration des sens de variations de quelques fonctions de référence sur leur ensemble de définition.

Prérequis : *Fonctions de référence, variation d'une fonction*
Niveau : $1^{ere}S$

1 Ordre du jour

Plus précisément, les propriétés suivantes seront démontrées :
- La fonction carré, $f(x) = x^2$, est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$
- La fonction inverse, $f(x) = \frac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$
- La fonction racine, $f(x) = \sqrt{x}$, est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$
- La fonction cube, $f(x) = x^3$, est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

On rappelle également la définition d'une fonction croissante ou décroissante sur un intervalle, que nous allons utiliser tout au long de cet article :

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle **I**. On dit que la fonction f est :
- Croissante sur **I** si pour tous $a, b \in I$, tels que $a > b$, on a $f(a) \geq f(b)$.
- Déroissante sur **I** si pour tous $a, b \in I$, tels que $a > b$, on a $f(a) \leq f(b)$.
Ajouter l'adjectif "*strictement*" à la variation d'une fonction signifie que l'on a respectivement les inégalités $f(a) > f(b)$ et $f(a) < f(b)$ dans les deux définitions ci-dessus.

Chacune des démonstrations sera proposée sous forme d'exercice guidé, que vous pourrez traiter par vous-même avant de consulter la correction, qui constituera la preuve de la propriété.

2 Démonstrations

2.1 La fonction carré

On cherche à montrer que la fonction carré, $f(x) = x^2$, est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$. Selon les définitions données plus haut, on cherche clairement à montrer les deux propositions suivantes :

$$\textit{"Pour tous } a, b \in \mathbb{R}_+, \textit{ tels que } a < b, \textit{ on a } a^2 < b^2\textit{"}$$
$$\textit{"Pour tous } a, b \in \mathbb{R}_-, \textit{ tels que } a < b, \textit{ on a } a^2 > b^2\textit{"}$$

Ces deux propositions montreront respectivement la croissante et décroissance stricte de la fonction carré sur les intervalles annoncés.
La clé de ces démonstrations sera de ramener les inéquations souhaitées à 0. Ainsi, on a :

$$a^2 < b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 < 0 \quad \text{et} \quad a^2 > b^2 \Leftrightarrow a^2 - b^2 > 0$$

Ceci a le bénéfice de réduire notre travail à l'étude du signe de l'expression $a^2 - b^2$. L'énoncé qui suit vous guidera à travers cette démonstration.

1) Ecrire $a^2 - b^2$ comme produit de deux termes en fonction de a et b. 2) On suppose $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $a < b$. Déduire de la question 1) que $a^2 - b^2 < 0$ dans ce cas. 3) On suppose $a, b \in \mathbb{R}_-$ tels que $a < b$. Déduire de la question 1) que $a^2 - b^2 > 0$ dans ce cas. 4) Conclure quant au sens de variation de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}_-$.

Correction :

1) Il suffit d'utiliser la troisième identité remarquable pour répondre à cette question :

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

2) On suppose $a, b \in \mathbb{R}_+$ tels que $a < b$. Le but est de montrer que $a^2 - b^2 < 0$. La question précédente nous indique que ceci revient à montrer que $(a+b)(a-b) < 0$. Etudions le signe de cette expression :
- Le terme $a + b$ est clairement positif car nous avons supposé que $a, b \in \mathbb{R}_+$
- Le terme $a - b$ est négatif, car nous avons supposé que $a < b$

Finalement, par produit d'un terme positif et d'un terme négatif, on déduit que $(a+b)(a-b) < 0$.

3) On suppose $a, b \in \mathbb{R}_-$ tels que $a < b$. Le but est de montrer que $a^2 - b^2 > 0$. La question 1) nous indique que ceci revient à montrer que $(a+b)(a-b) > 0$. Etudions le signe de cette expression :
- Le terme $a + b$ est clairement négatif car nous avons supposé que $a, b \in \mathbb{R}_-$
- Le terme $a - b$ est négatif, car nous avons supposé que $a < b$

Finalement, par produit de deux termes négatifs, on déduit que $(a+b)(a-b) > 0$.

4) Il n'y a qu'un pas à franchir pour démontrer ce que nous voulons : réécrire et interpréter les résultats obtenus dans les deux questions précédentes.
Selon la question 1), $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. Dans la question 2), nous avons montré que :

"*Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+$, tels que $a < b$, on a $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) < 0$. Donc $a^2 < b^2$*".

Ceci montre la croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$.
De même, dans la question 3), nous avons montré que :

"*Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_-$, tels que $a < b$, on a $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b) > 0$. Donc $a^2 > b^2$*".

Ceci montre la décroissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_-$.
Les variations annoncées ont bien été démontrées sur les intervalles annoncés. $\square$

2.2 La fonction inverse

On cherche à montrer que la fonction inverse, $f(x) = \frac{1}{x}$, est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$. Selon les définitions données en préambule, on cherche à établir :

"*Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, tels que $a < b$, on a $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$*"

"*Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_-^*$, tels que $a < b$, on a $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$*"

A nouveau, on cherchera à établir que $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} > 0$ dans les deux cas. Bien que ces deux propositions semblent exiger les même démarches, il est impératif de découper l'étude de la variation en deux parties (sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$). En effet, la fonction inverse n'étant pas définie en $x = 0$, on ne peut en faire une étude globale et directe sur son ensemble de définition. La démarche à suivre est précisée dans l'encadré suivant :

1) Ecrire $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ sous forme d'une seule fraction. 2) Que peut on dire du signe du produit ab lorsque $a, b \in \mathbb{R}_+^*$? Même question pour $a, b \in \mathbb{R}_-^*$ 3) En justifiant que $b - a > 0$ dans les deux cas, déduire de la question précédente le signe du quotient obtenu dans la question 1). Conclure.

Correction :

1) En réduisant chaque fraction au même dénominateur :

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b}{ba}-\frac{a}{ab}=\frac{b-a}{ab}$$

2) Il suffit d'appliquer la règle des signes : Lorsque $a,b\in\mathbb{R}_+^*$, alors ab est un produit de deux termes positifs. Donc ab est positif. De même, lorsque $a,b\in\mathbb{R}_-^*$, alors ab est un produit de deux termes négatifs. Donc ab est positif. Ainsi, dans les deux cas d'étude, le terme ab est positif.

3) On a supposé que $a<b$. En réécrivant cette inégalité :

$$a<b \;\Leftrightarrow\; b>a \;\Leftrightarrow\; b-a>0$$

Il s'agit alors d'observer le signe de $\dfrac{b-a}{ab}$. Par la remarque précédente et la question précédente, on obtient que ce quotient est toujours le quotient de deux termes positifs. Ainsi $\dfrac{b-a}{ab}>0$ lorsque $a,b\in\mathbb{R}_+^*$ et $a,b\in\mathbb{R}_-^*$. On conclut : Selon la question 1), $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{b-a}{ab}$. Dans la question 3), nous avons montré que :

$$\text{"}\textit{Pour tout } a,b\in\mathbb{R}_+^*,\textit{ tels que } a<b,\textit{ on a } \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}>0.\textit{ Donc } \frac{1}{a}>\frac{1}{b}\text{"}.$$

Ceci montre la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.
De même, dans la question 3), nous avons montré que :

$$\text{"}\textit{Pour tout } a,b\in\mathbb{R}_-^*,\textit{ tels que } a<b,\textit{ on a } \frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}>0.\textit{ Donc } \frac{1}{a}>\frac{1}{b}\text{"}.$$

Ceci montre la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_-$. □

2.3 La fonction racine

Pour cette troisième démonstration, on s'attaque à la fonction racine $f(x)=\sqrt{x}$. On cherche à montrer qu'elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Le côté agréable de cette fonction est qu'elle n'est définie que sur des nombres positifs, on peut donc étudier son sens de variation (qui par ailleurs est unique) directement, sans découper les domaines d'études comme fait dans la section précédente. L'inconvénient pourrait provenir de la manipulation calculatoire de la fonction elle-même, mais ici il n'en est rien. Une fois n'est pas coutume, on va établir que...

$$\text{"}\textit{Pour tous } a,b\in\mathbb{R}_+,\textit{ tels que } a<b,\textit{ on a } \sqrt{a}<\sqrt{b}\text{"}$$

... et que nous allons rapidement transformer en $\sqrt{a}-\sqrt{b}<0$. La stratégie sera la suivante :

1) Montrer que $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=a-b$ pour $a,b\in\mathbb{R}_+$. 2) En déduire que $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$ pour $a,b\in\mathbb{R}_+$. 3) En étudiant le signe du numérateur et du dénominateur, établir que $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}<0$ pour tous $a,b\in\mathbb{R}_+$. Conclure.

Correction :

1) Les plus attentifs auront remarqué une identité remarquable en observant que $\sqrt{a}^2=a$ et $\sqrt{b}^2=b$. Dans le détail, si nécessaire :

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=\sqrt{a}^2+\sqrt{a}\sqrt{b}-\sqrt{a}\sqrt{b}-\sqrt{b}^2=a+\sqrt{ab}-\sqrt{ab}-b=a-b$$

2) Selon la question précédente et en simplifiant la fraction obtenue :

$$\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$$

3) On a supposé que $a < b$. On en déduit aisément que $a - b < 0$. Quant au dénominateur, il s'agit de la somme de deux racines carrées, qui sont toujours positives. Donc $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ est positif. Le quotient obtenu précédemment est donc négatif pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$. Il ne nous reste plus qu'à conclure ! A l'aide de la question 2) et du résultat précédent, on a donc montré que $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} < 0$, soit $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. Ainsi on obtient :

"*Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$, tels que $a < b$, on a $\sqrt{a} < \sqrt{b}$*"

C'est le résultat que l'on cherchait à démontrer, la fonction racine est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$. $\square$

2.4 La fonction cube

A nouveau, comme pour les précédentes démonstrations, on cherchera à montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$, on a $a^3 < b^3$. On cherchera à nouveau plutôt à montrer l'inégalité équivalente suivante : $a^3 - b^3 < 0$.

1) Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
2) Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a $a^2 + ab + b^2 = (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4}$
3) A l'aide des questions précédentes, montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$, on a $a^3 < b^3$, puis conclure.

Correction :
1) Il suffit de développer le membre de droite :

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - ba^2 - a^2b - b^3 = a^3 - b^3$$

2) A nouveau, il suffit de développer le membre de droite :

$$(a + \tfrac{b}{2})^2 + \tfrac{3b^2}{4} = a^2 + 2a\tfrac{b}{2} + \tfrac{b^2}{4} + \tfrac{3b^2}{4} = a^2 + ab + \tfrac{4b^2}{4} = a^2 + ab + b^2$$

3) A présent, il s'agit de comprendre comment utiliser les deux questions précédentes. Comme précédemment, nous allons passer par l'étude de $a^3 - b^3$. En effet, montrer que $a^3 < b^3$ revient à montrer que $a^3 - b^3 < 0$. Il s'agit donc de donner une autre écriture de $a^3 - b^3$. Selon la question 1), on a :

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Puis, selon la question 2) :

$$a^3 - b^3 = (a-b)[(a + \tfrac{b}{2})^2 + \tfrac{3b^2}{4}]$$

Observons le signe de cette expression :
- Tout d'abord, le premier terme $a - b$ est négatif car nous avons supposé que $a < b$.
- Ensuite, le second terme $(a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3b^2}{4}$ est clairement positif en tant que somme de deux carrés.
- On en déduit que $(a-b)[(a+\frac{b}{2})^2+\frac{3b^2}{4}]$ est négatif lorsque $a < b$, par produit d'un terme négatif et d'un terme positif

Or comme cette expression est égale à $a^3 - b^3$, nous venons de montrer que $a^3 - b^3 < 0$. On peut ainsi résumer notre travail de la façon suivante :

"*Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$, on a $a^3 < b^3$*".

C'est ce que nous voulions démontrer ! La fonction cube est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $\square$

C'est ainsi que s'achèvent les démonstrations de ces propriétés. Notez tout de même que les propos que l'on peut tenir, en disant que "*la courbe monte*" ou "*la courbe descend*", cachent parfois une démonstration bien plus compliquée à établir, mais qui est nécessaire pour confirmer ces propriétés avec rigueur.

"*Les mathématiciens sont comme les français : quoique vous leur dites, ils le traduisent dans leur propre langue et le transforment en quelque chose de totalement différent.*" - Johann Wolfgang GOETHE