L'eau, le gaz, l'electricité

Maxime KIENTZ

27 septembre 2017

Cet article traîte d'un problème assez connu du public et dont la résolution (ou plutôt la non-résolution) s'explique avec de la *théorie des graphes*, au programme de T^{ale} L-ES spécialité Math. Cette énigme est déjà posée par Henry Dudeney [1] en 1917 dans son livre "*Amusements in mathematics*".

Prérequis : *Théorie des graphes*
Niveau : T^{ale} *L-ES spécialité Math.*

En voici l'énoncé : On considère trois maisons, ainsi que trois points de distribution. L'un distribue l'eau, l'autre le gaz, et le dernier l'electricité (**Figure 1**). On cherche à relier les trois points de distribution aux trois maisons, sans que les conduits ne se croisent entre eux : en effet, on suppose également que l'on se trouve dans un plan et que les conduits ne peuvent donc pas passer l'un sous l'autre. Relier les maisons aux points de distribution comme le montre la **Figure 2** est donc interdit.

FIGURE 1 – La situation de base

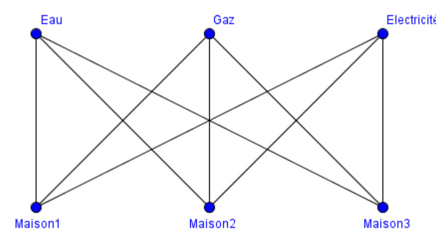

FIGURE 2 – Ce qui est interdit

1 Premiers essais

Essayons de relier ces trois points de distribution aux trois maisons comme demandé. Commençons avec le gaz : Comme ce dernier se trouve au centre des trois points de distribution, le chemin le plus court et donc le moins encombrant semble être un segment allant directement du point aux trois maisons. Sur le même principe, comme le point d'eau se trouve en face de la *maison 1*, et l'electricité en face de la *maison 3*, relions-les avec un segment direct. Pour relier l'eau à la *maison 2*, on décide de contourner la *maison 1*, afin de laisser le champ libre à la conduite d'electricité qui sera reliée directement à la *maison 1*. Nous avons donc totalement alimenté la *maison 1*, comme le montre la **Figure 3**.

Mais en répétant ce procédé pour la *maison 3*, par exemple, on se rend compte que le point d'éléctricité est "*enfermé*" dans la figure délimitée par les précédents segments et que le seul moyen de relier la *maison 2* au point d'electricité serait de chevaucher des conduits (**Figure 4**). Or ceci est interdit, donc notre construction n'est pas la bonne.

1. Henry Ernest Dudeney (10 avril 1857 - 24 avril 1930) est un concepteur britannique de casse-tête numériques et logiques. Il est l'un des concepteurs de casse-tête les plus connus de son pays

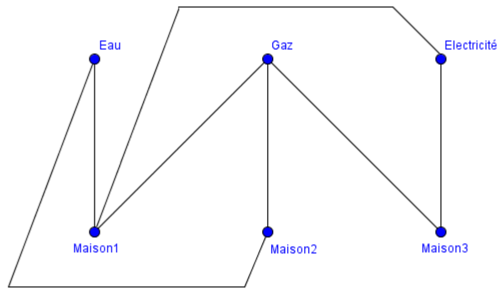

FIGURE 3 – La maison 1 est alimentée

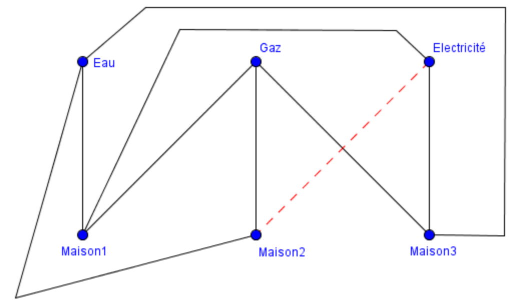

FIGURE 4 – Impossibilité de relier le dernier point à la dernière maison

Bien qu'un seul exemple de construction (qui n'aboutit pas) a été présenté ici, il se pourrait qu'il existe (au moins) une configuration satisfaisant les attentes du problème. Mais, aussi simple que ce problème paraisse, il ne possède aucune solution. Ce qui suit a pour but de vulgariser la démonstration afin d'argumenter cette impossibilité. Les explications s'appuyeront sur le contenu relatif à la théorie des graphes enseigné au lycée.

2 Un problème de planarité

Nous allons expliquer pourquoi ce problème n'a pas de solution si l'on se cantone à notre cadre. Premièrement, vous l'aurez compris ou aperçu, notre schéma est en fait un graphe, au sens de la théorie des graphes de votre programme. Il possède 6 sommets, qui sont les points *Eau*, *Gaz*, *Electricité*, $Maison_1$, $Maison_2$, $Maison_3$ de notre schéma, ainsi que 9 arêtes qui sont les conduits de notre problème.

Le but de ce problème est de montrer que le graphe n'est pas planaire, au sens de la définition suivante :

Définition : On appelle *graphe planaire* tout graphe qui a la particularité de pouvoir se représenter sur un plan sans qu'aucune arête n'en croise une autre.

La **Figure 5** ci-contre illustre cette notion.

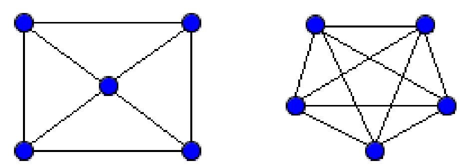

FIGURE 5 – Le graphe de gauche est planaire, celui de droite ne l'est pas

3 Graphe biparti-complet

En observant plus précisément ce graphe, on peut observer qu'il est en fait réparti en deux groupes de 3 points (les *maisons* et les *points de distribution*), et que chaque point d'un groupe est relié aux 3 points de l'autre groupe. Un tel graphe porte une dénomination particulière, inspirée de la définition suivante :

Définition : On appelle *graphe biparti-complet* un graphe dont les sommets peuvent être répartis en deux groupes G_1 et G_2 et tel que chaque sommet de G_1 est relié à tous les sommets de G_2. Si G_1 contient n sommets et G_2 contient m sommets, alors le graphe biparti-complet associé à cette configuration sera noté $K_{n,m}$

Exemple : Quelques illustrations de graphes biparti-complets dans la **Figure 6**

Par l'observation faite peu avant, on peut identifier notre graphe : il s'agit du graphe biparti-complet $K_{3,3}$.

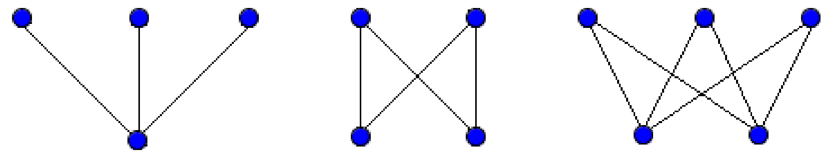

FIGURE 6 – Les graphes $K_{3,1}$, $K_{2,2}$, $K_{3,2}$

4 Résolution du problème : le graphe $K_{3,3}$ n'est pas planaire

Pour démontrer que notre problème ne possède aucune solution, nous devons relier les deux notions vues précédemment et montrer que le graphe $K_{3,3}$ correspondant à notre situation n'est pas planaire. Pour ce faire, nous allons utiliser une majoration issue de la formule d'Euler [2] (donnée ci-après), sous sa version concernant les graphes :

Propriété (Majoration arêtes-sommets) : Soit G un graphe, n le nombre de sommets de ce graphe et a le nombre d'arêtes de ce graphe. Si G est un graphe planaire connexe ayant au moins trois sommets, alors la majoration suivante est vérifiée : $a \leq 3n - 6$.

Si de plus le graphe est dit "*sans triangles*", c'est à dire sans triplets de sommets et d'arêtes formant un triangle (voir **Figure 7**), alors cette majoration peut s'affiner.

Propriété (Affinée) : Soit G un graphe, n le nombre de sommets de ce graphe et a le nombre d'arêtes de ce graphe. Si G est un graphe planaire connexe, ayant au moins trois sommets ***et sans triangles***, alors la majoration suivante est vérifiée : $a \leq 2n - 4$

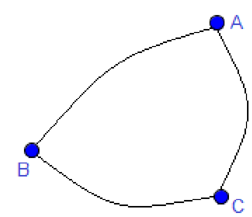

FIGURE 7 – Un triangle dans un graphe

Cette majoritation est issue de la formule d'Euler $n - a + f = 2$ (où n est le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes, et f le nombre de faces du graphe) ainsi que d'une manipulation astucieuse pour majorer le nombre de faces. Elle n'a pas lieu d'être dans cet article mais peut être retrouvée par ici [3] pour les personnes les plus chevronnées.

Ainsi ces deux propriétés seront admises. L'important étant d'observer le cas du graphe $K_{3,3}$. Comme indiqué au début de l'article, $K_{3,3}$ possède 6 sommets et 9 arêtes. De plus, on peut facilement se convaincre que le graphe ne possède pas de triangle (cela reviendrai à relier deux maisons ensemble ou deux points de distribution ensemble, ce qui n'est pas le but du problème). En observant l'inéquation de la propriété ci-dessus, on observe que

$$a \leq 2n - 4 \quad \Leftrightarrow \quad 9 \leq 2 \times 6 - 4 \quad \Leftrightarrow \quad 9 \leq 8$$

Evidemment, ce résulat est absurde.

Par contraposée de la propriété, $K_{3,3}$ n'est donc pas un graphe planaire, réduisant à néant tout espoir de trouver une solution à notre problème...

"Les mathématiques ont des inventions très subtiles et qui peuvent beaucoup servir, tant à contenter les curieux qu'à faciliter tous les arts et à diminuer le travail des hommes" - René DESCARTES

2. Leonhard Euler, (15 avril 1707 - 18 septembre 1783), est un mathématicien et physicien suisse considéré comme l'un des plus grands et plus éminents mathématicien de tous les temps
3. http ://culturemath.ens.fr/maths/pdf/combi/planaire.pdf