

CHAPITRE 18 - EQUATIONS

1) Notion d'équation du premier degré, propriétés

1) Solutions d'une équation

Définition : Une *équation* est une égalité dans laquelle figurent une ou plusieurs inconnues, et dont le but est de déterminer la valeur qui rend vraie cette égalité.

Exemple : $3x + 2 = 5x - 4$ est une égalité. Si l'on cherche à trouver la valeur de x qui fait que cette égalité est vraie, alors on cherche à *résoudre l'équation*. On rappelle que la partie à gauche du symbole " $=$ " s'appelle le membre de gauche, et celle à droite s'appelle le membre de droite.

Définition : Une *solution* d'une équation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'égalité est vraie. *Résoudre* une équation, c'est trouver toutes ses solutions.

Exemple : Le nombre 3 est solution de l'équation $3x + 2 = 5x - 4$. En effet :

- D'une part, on calcule le membre de gauche pour $x = 3$: $3 \times 3 + 2 = 11$
- D'autre part, on calcule le membre de droite pour $x = 3$: $5 \times 3 - 4 = 11$

On obtient le même résultat dans les deux membres, donc on conclut que " $x=3$ est la solution de l'équation $3x + 2 = 5x - 4$ "

2) Propriété des équations

Propriété : Une équation du 1^{er} degré à une inconnue s'écrit $ax + b = cx + d$, où a, b, c, d sont quatre nombres avec a et c non nul. Une telle équation admet *aucune, une ou une infinité* de solution.

Exemples :

- $x = x + 1$ n'admet aucune solution. Un nombre n'est jamais égal à lui-même plus 1.
- $x = x$ admet une infinité de solution. Un nombre est toujours égal à lui-même.
- $3x + 2 = 5x - 4$ admet une seule solution, et on a vu que c'était $x = 3$.

En pratique, celles étudiées n'en auront qu'une seule dans le cas général. Il s'agit donc de se donner des méthodes pour arriver à trouver la solution de chaque équation qui peut se présenter à nous.

Propriétés : Les opérations suivantes ne perturbent pas une égalité :

- 1) Une égalité reste vraie *si on ajoute (ou si on soustrait) un même nombre* à ses deux membres.
- 2) Une égalité reste vraie *si on multiplie (ou si on divise) ses deux membres par un même nombre*.

Exemples :

La solution de $4x + 2 = 6$ est la même que celle : La solution de $4x + 2 = 6$ est la même que celle :

- de $4x + 6 = 10$ (ajouté 4 de chaque côté)
- de $8x + 4 = 12$ (produit par 2 de chaque côté)
- de $4x - 4 = 0$ (soustrait 10 de chaque côté)
- de $2x + 1 = 3$ (divisé par 2 de chaque côté)
- de $5x + 2 = 6 + x$ (ajouté x de chaque côté)

On peut alors modifier l'écriture des équations pour déterminer leur solution. En effet :

- $-2x + 3 = 7$ correspond à $-2x + 3 - 3 = 7 - 3$ donc $-2x = 4$. Ici, la solution $x = -2$ est évidente.
- $5x = 3x + 6$ correspond à $5x - 3x = 3x + 6 - 3x$ donc $2x = 6$. Ici, la solution est $x = 3$.
- $3x + 1 = 2x - 4$ correspond à $3x - 2x = -4 - 1$ donc $-5x = -5$. Ici, la solution est $x = 1$.

A retenir : Pour passer un terme de l'autre côté de l'équation, on ajoute son opposé dans les deux membres de l'équation.

Vidéos :	Vérifier si un nombre est solution d'une équation
	https://www.youtube.com/watch?v=PLuSPM6rJKI&list=PLVUDmbpupCap9__omIxfdwJsTQKaTQ5vj&index=2
	EXERCICE : Vérifier si un nombre est solution d'une équation
	https://www.youtube.com/watch?v=aC17g0UgdwI&list=PLVUDmbpupCap9__omIxfdwJsTQKaTQ5vj&index=3
	Mettre un problème en équation
	https://www.youtube.com/watch?v=q3ijSWk1iF8&list=PLVUDmbpupCap9__omIxfdwJsTQKaTQ5vj&index=4
	EXERCICE : Mettre un problème en équation
	https://www.youtube.com/watch?v=I_wd09qH5LQ&list=PLVUDmbpupCap9__omIxfdwJsTQKaTQ5vj&index=5

II) Résoudre une équation

La méthode pour résoudre une équation du premier degré est générale et sera détaillée ci-dessous. La difficulté réside alors dans la forme de l'équation à résoudre : parfois, il y aura des étapes à sauter car la forme ne s'y prête pas. Il faut reconnaître ces situations une à une pour savoir ce qui est nécessaire dans la méthode et ce qui ne l'est pas. Voici la méthode globale :

Méthode :

- 1) **Résoudre** l'équation :
 - a) Regrouper tous les termes variables dans un membre de l'équation (à gauche, souvent)
 - b) Regrouper tous les termes constants dans l'autre membre (à droite, souvent)
 - c) Réduire les expressions obtenues (donc simplifier leurs écritures)
 - d) Puis isoler la variable en divisant par le nombre devant cette variable.
- 2) **Vérifier** que la valeur trouvée est bien solution de l'équation.
- 3) **Conclure**.

1) Equations de la forme $x + a = b$

Ces équations sont les plus simples car elles sont uniquement à deux étapes de la solutions. La variable est déjà isolée et reliée à une constante par soit une addition soit une soustraction, il n'y aura donc pas de division finale à faire (**étape 1d**). De plus, cette variable est la seule, donc l'étape 1a) n'est pas non plus nécessaire. Il faut donc simplement :

- Regrouper les termes constants ensemble d'un même côté (**1b**)
- Calculer le résultat obtenu de ce côté (**1c**)

Exemples 1 : On souhaite résoudre ces deux équations.

$x + 8 = 19$	$x - 7 = -8$	
$x + 8 - 8 = 19 - 8$	$x - 7 + 7 = -8 + 7$	→ On isole le terme x .
$x = 11$	$x = -1$	→ On simplifie.
11 est la solution de l'équation $x + 8 = 19$.	-1 est la solution de l'équation $x - 7 = -8$.	→ On donne la solution.

2) Equations de la forme $ax = b$

Cette fois, la variable n'est pas isolée et est reliée par une multiplication à une constante. On aura donc à diviser (**étape 1d**) pour l'isoler. On remarquera que (**1a**) et (**1b**) sont inutiles car il n'y a qu'un terme variable et qu'un seul terme constant, et par conséquent il n'y a rien à réduire, donc (**1c**) est inutile aussi. Il faut donc simplement :

- Isoler la variable en divisant de chaque côté par le nombre devant elle (1d).

Exemples 2 : On souhaite résoudre ces deux équations.

$4x = 18$	$\frac{x}{3} = 2,5$	
$4x \div 4 = 18 \div 4$	$\frac{x}{3} \times 3 = 2,5 \times 3$	→ On isole le terme x .
$x = 4,5$	$x = 7,5$	→ On simplifie.
4,5 est la solution de l'équation $4x = 18$.	7,5 est la solution de l'équation $\frac{x}{3} = 2,5$.	→ On donne la solution.

Vidéos : Résoudre une équation (2)

https://www.youtube.com/watch?v=mK8Y-v-K0cM&list=PLVUDmbpupCap9__omIxfdwJsTQKaTQ5vj&index=8

Résoudre une équation (3)

https://www.youtube.com/watch?v=BOq2Lk9Uyw8&list=PLVUDmbpupCap9__omIxfdwJsTQKaTQ5vj&index=9

3) Cas général $ax + b = cx + d$

Comme il s'agit du cas général, il existe des situations où les quatre étapes de la méthode sont à appliquer. L'exemple ci-après illustre ceci. Mais il existe aussi des cas où seules certaines étapes sont à réaliser, et pas d'autres. C'est au cas par cas. Quelques remarques tout de même :

- Attention aux signes en envoyant des constantes dans l'autre membre (par addition ou soustraction), il faut penser à prendre l'opposé.
- L'ensemble des techniques opératoires vues pendant l'année peuvent être mises à contribution ici (sur les relatifs, les fractions, les décimaux, etc..)
- Le résultat n'est pas toujours un nombre entier, il se peut que ce soit une fraction
- Après l'étape finale, on pourra penser à simplifier le résultat si c'est une fraction.

Exemple 3 : On souhaite résoudre cette équation.

$-3x + 5 = 12$	
$-3x + 5 - 5 = 12 - 5$	→ On soustrait 5 aux deux membres en appliquant la propriété 1.
$-3x = 7$	→ On réduit.
$\frac{-3x}{-3} = \frac{7}{-3}$	→ On divise par -3 les deux membres en appliquant la propriété 2.
$x = -\frac{7}{3}$	→ On réduit.
$-\frac{7}{3}$ est la solution de l'équation $-3x + 5 = 12$.	

Remarques :

- Concernant la rédaction, on pensera à aligner les symboles " $=$ " afin de bien distinguer ce qui a été fait dans chaque membre de l'équation.
- Cette méthode ne fonctionne que lorsque l'équation se présente bien sous la forme $ax + b = cx + d$. Si ce n'est pas le cas, il faut d'abord faire en sorte que l'équation se présente sous cette forme avec les outils classiques : distributivité, double distributivité, réduction, etc.

Exemple : $2(x+3) = 5x - 4$ ne peut être résolue directement, il faut développer : $2(x+3) = 5x - 4$ revient à $2x + 6 = 5x - 4$. C'est à partir de là que l'on peut utiliser la méthode :

$$2x + 6 = 5x - 4 \quad \Rightarrow \quad 2x - 5x = -4 - 6 \quad \Rightarrow \quad -3x = -10 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-10}{-3} = \frac{10}{3}$$

Ressource : Pour s'entraîner à travailler sur ce genre d'équation, je vous conseille le logiciel THOT créé par Emmanuel MORAND et disponible à l'adresse ci-bas. Il s'agit d'un logiciel vous proposant une équation à résoudre et des outils pour la résoudre pas à pas. Il y a même un indicateur que votre solution est la bonne. <http://www.emmanuelmorand.net/thot/telechargement.php>

Vidéos :

Mettre un problème en équation (1)

<https://www.youtube.com/watch?v=Xn8rUSZPO34&list=PLVUDmbpupCag2R9lshWHo7HOI28SiStNd&index=12>

Résoudre une équation (4)

https://www.youtube.com/watch?v=QURskM271bE&list=PLVUDmbpupCap9__omIxfdwJsTQKaTQ5vj&index=10

EXERCICE : Résoudre une équation (1)

https://www.youtube.com/watch?v=9rCgwGqJv6I&list=PLVUDmbpupCap9__omIxfdwJsTQKaTQ5vj&index=10

EXERCICE : Résoudre une équation (2)

https://www.youtube.com/watch?v=-IfzunHS6Z8&list=PLVUDmbpupCap9__omIxfdwJsTQKaTQ5vj&index=11

EXERCICES – CHAPITRE 18

1) Notion d'équations du premier degré, propriétés, p.65

1 Relie chaque équation de gauche à sa solution de droite.

2 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

$3x + 1 = -2$	•	1	$2x + 3 = 3x + 7$	•	-4
$3x - 1 = -2$	•	$\frac{2}{3}$	$2x + 3 = -3x + 7$	•	-0,8
$3x = 2$	•	$\frac{1}{3}$	$2x - 3 = -3x + 7$	•	0
$3x - 1 = 2$	•	$-\frac{1}{3}$	$2x - 3 = -3x - 7$	•	0,8
$3x + 1 = 2$	•	-1	$2x - 3 = 3x - 7$	•	2
			$2x = 3x$	•	4

3 Le nombre 3 est-il solution de chacune de ces équations ?

a. $4x + 2 = 5$	b. $7 - 5x = -8$	c. $1,5x - 4,5 = 0$
.....		
.....		
.....		
.....		

5 a. Complète les tableaux de valeurs suivants.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$3 - 6x$								

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$7 - 2x$								

b. En t'aidant de ces tableaux, indique si les affirmations ci-dessous sont vraies ou fausses.

• 0 est solution de $3 - 6x = 3$	V	F	• 2 est solution de $3 - 6x = 7 - 2x$	V	F
• -3 est solution de $3 - 6x = -15$	V	F	car		
• -2 est solution de $7 - 2x = 1$	V	F	• -1 est solution de $3 - 6x = 7 - 2x$	V	F
• 1 est solution de $7 - 2x = 5$	V	F	car		

4 Le nombre - 2 est-il solution de chacune de ces équations ?

a. $7x - 3 = 6x - 5$ Pour $x = -2$, on calcule : - d'une part, $7x - 3$ = - d'autre part, $6x - 5$ = Ces résultats sont donc - 2	b. $4x - 7 = 7x + 1$ 	c. $-2,7x + 5 = 3,3x - 6,2$
--	--	---

II) Résoudre une équation, p.67

1) Equations de la forme $x + a = b$

1 Résous chaque équation.

a. $x + 2 = 0$	b. $-3 + x = 0$	c. $-9 + x = -4$	d. $7 - x = -2$	e. $2 - x = 10$

2) Equations de la forme $ax = b$

2 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

a. $2x = 7$	b. $7x = -2$	c. $-3x = 4$	d. $-9x = -45$	e. $11x = 44$

3) Cas général $ax + b = cx + d$

3 Même énoncé qu'à l'exercice précédent.

a. $2x + 9 = 0$	b. $5 - 4x = 0$	c. $6x - 7 = 0$	d. $-8 - 3x = 0$

e. $6x + 42 = 0$	f. $5 - 2,5x = 0$	g. $7x - 1 = 0$	h. $-8x - 8 = 0$
-------------------------	--------------------------	------------------------	-------------------------

1 Résous chaque équation.

a. $12 + 3x = 7x + 10$	b. $-3x - 4 = 5 + x$	c. $4x - 9 = -6 + 12x$
d. $2 + 5x = -2x - 3$	e. $4x - 1 = 14 + x$	f. $-0,1 + 6x = -8x + 0,1$